$= 2\pi$. В этом случае получаем

$$\sigma_\theta = \frac{WE\alpha\,(1-p^2)}{4\pi\lambda}, \tag{11}$$

где $W = 2\pi a q$ — величина суммарной интенсивности.

Установим закон изменения напряжений вдоль границы пластинки, которая находится под влиянием источников тепла постоянной интенсивности q, распределенных по отрезку радиуса от $r = a_1$ до $r = a_2$. Угол между осью x и радиусом обозначим через β (рисунок, *в*). Для решения поставленной задачи используем функцию Грина. После выполнения интегрирования по переменной a в пределах от a_1 до a_2 формула для напряжения σ_θ принимает вид

$$H\sigma_\theta = C + M\cos\gamma + N\cos^2\gamma - 2\sin\gamma\,\{\sin 2\gamma\,[\ln\Psi(p_2,\ \beta,\ \theta) -$$
$$-\ln\Psi(p_1,\ \beta,\ \theta)] + 2\cos 2\gamma\,[\operatorname{arctg}\Omega(p_2,\ \beta,\ \theta) - \operatorname{arctg}\Omega(p_1,\ \beta,\ \theta)]\},$$

где

$$H = \frac{4\pi\lambda}{qE\alpha R};\quad \gamma = \theta - \beta;\quad C = \frac{1}{3}(p_2^3 - p_1^3) - 3(p_2 - p_1);$$
$$M = p_2^2 - p_1^2;\quad N = 4(p_2 - p_1);\quad \Psi(p_i,\ \beta,\ \theta) = 1 + p_i^2 - 2p_i\cos\gamma;$$
$$p_i = \frac{a_i}{R};\quad \Omega(p_i,\ \beta,\ \theta) = \frac{p_i - \cos\gamma}{\sin\gamma} \qquad (i = 1,\ 2).$$

Рассмотрим другой частный случай, когда источники тепла равномерно распределены по кольцу с внутренним радиусом a_1 и наружным a_2. Интенсивность источников тепла постоянна и равна q. Закон изменения напряжения вдоль контура пластинки описывается формулой

$$\sigma_\theta = WE\alpha\,(2 - p_2^2 - p_1^2)/8\pi\lambda,$$

где $W = \pi q\,(a_2^2 - a_1^2)$ — величина суммарной интенсивности.

Заметим, если источник тепла помещен в центре пластинки, то решение может быть получено путем предельного перехода ($a \to 0$), выполненного по одной из формул (8) — (11). Напряжение σ_θ тогда определяется так:

$$\sigma_\theta = \frac{WE\alpha}{4\pi\lambda}.$$

Эта формула совпадает с решением, найденным в работах [1, 3] иным способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бажанов В. Л. и др.* Расчет конструкций на тепловые воздействия. М., «Машиностроение», 1969. 600 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962. 1100 с.
3. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958. 168 с.
4. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1967. 168 с.

Саратовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 25.VI 1975 г.

УДК 539.377

И. И. Федик, В. И. Кожуховский, В. С. Егоров

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГОВОМ СЕКТОРЕ

Задача термоупругости для кругового сектора конечного радиуса рассматривалась в работах [4, 7, 8] с использованием методов ортогональных полиномов или тригонометрических рядов. Общим недостатком проведенных исследований, за исключением частного результата, приведенного в работе [7], является отсутствие количественных данных, характеризующих величину и распределение термоупругих напряжений. В настоящей работе приведен анализ напряженного состояния в секторе, подвергнутом неравномерному распределению температуры. Решение первой краевой задачи для бигармонического уравнения построено на основе вариационного процесса Ритца с использованием ортогонализации. Полученные данные для некоторых частных значений угла раствора сектора сопоставлены с результатами расчета термоупругих напряжений в диске с краевой трещиной.

Пусть область D — сектор радиуса R с центральным углом 2β, в котором осуществляется распределение температуры $T(r, \theta)$. Предположим, что материал однороден и изотропен, а его свойства не зависят от температуры. Рассмотрим случай плоского напряженного состояния, имеющего место в тонкой пластинке. Термоупругие напряжения в секторе определяются зависимостями [1]

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right), \tag{1}$$

причем функция напряжений F удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 F = -\alpha E \Delta T, \qquad 0 \leqslant r \leqslant R, \quad -\beta \leqslant \theta \leqslant \beta. \tag{2}$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа. Граничные условия для сектора, контур Γ которого свободен от внешних нагрузок, имеют вид

$$F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

где n означает направление внешней нормали к контуру области D.

Поставленная задача эквивалентна отысканию минимума функционала [3]

$$J(F) = \iint_D [(\Delta F)^2 + 2\alpha E F \Delta T]\, ds. \tag{4}$$

В соответствии с вариационным процессом Ритца оптимальный элемент построим в виде ряда

$$F_* = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q_n, \tag{5}$$

где $\{q_n\}$ — полная ортонормированная система в энергетическом пространстве, а

$$c_n = -(\alpha E \Delta T, q_n), \tag{6}$$

причем $(\varphi, \psi) = \iint_D \varphi\psi ds$.

Энергетическое пространство бигармонического оператора состоит из непрерывных и четырежды непрерывно дифференцируемых функций в замкнутой области $\bar{D} = D + \Gamma$, удовлетворяющих условиям (3). Выражение скалярного произведения в этом пространстве имеет вид

$$[\varphi, \psi] = \iint_D \Delta\varphi\Delta\psi ds. \tag{7}$$

Заметим, что минимальное значение функционала (4) определяется энергетической нормой решения F_* уравнения (2) с условиями (3):

$$\min J(F) = -[F_*, F_*] = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2. \tag{8}$$

Ортонормированную систему получим из полной последовательности линейно независимых элементов $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots,$ используя процесс ортогонализации Э. Шмидта. В работах [2, 6] отмечено, что этот процесс достаточно трудоемкий при практической реализации. Для уменьшения трудоемкости воспользуемся методом квадратного корня (см., например, [6])

$$q_n = \frac{1}{\beta_{nn}}\left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} q_i\right), \tag{9}$$

$$\beta_{nn} = \sqrt{[f_n, f_n] - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni}^2}, \tag{10}$$

$$\beta_{ni} = \frac{1}{\beta_{nn}}\left([f_n, f_i] - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{nj}\beta_{ij}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots; \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Значение суммы принимается равным нулю, если верхний предел меньше нижнего. Для определения коэффициентов c_n получим формулу

Параметр	β, град			
	28,6	90	140	180
λ	—1,75	0	0,465	0,489
λ_B	—3,1	0	0,47	0,5

Примечание. Значение λ_B взято из работы [9].

$$c_n = -\frac{1}{\beta_{nn}}\left[(\alpha E \Delta T, f_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} c_i\right], \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Данный алгоритм ортогонализации и определения минимума функционала (4) выполнен в виде стандартной программы для ЭВМ М-222, составленной М. А. Мосейчук.

В качестве примера рассмотрим одномерное распределение температуры

$$T = T_0 + (T_R - T_0)\left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{13}$$

где T_0, T_R — температура в вершине сектора и на его криволинейной границе. Этот случай соответствует, например, стационарному распределению температуры в секторе, который нагревается внутренними источниками тепла плотностью $q_0 = \mathrm{const}$ и охлаждается по криволинейному участку боковой поверхности путем теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона. Прямолинейные грани боковой поверхности и торцы предполагаются теплоизолированными. Последовательность $\{f_n\}$ имеет следующий вид:

$$\varphi_0\psi_0, \quad \varphi_1\psi_0, \quad \varphi_0\psi_1, \quad \varphi_2\psi_0, \quad \varphi_1\psi_1, \quad \varphi_0\psi_2, \ \ldots, \tag{14}$$

где

$$\varphi_i(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^{i+2-\lambda}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2;$$
$$\psi_j(\theta) = \theta^{2j}(\beta^2 - \theta^2)^2, \qquad i, j = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

При этом параметр λ, введенный для того, чтобы учесть возможность появления сингулярных решений, находится из условия минимума функционала (4).

В таблице приведены значения λ для некоторых углов β. Различие λ и λ_B при $\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \pi$ не превосходит 2% и является, по-видимому, следствием того, что при расчете энергетической нормы учитывалось конечное число членов ряда (8), принятое равным 44. Заметное отличие λ и λ_B при $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ объясняется, вероятно, влиянием границы $r = R$ на распределение напряжений вблизи вершины сектора (в работе [10] рассмотрен сектор бесконечного радиуса). Учитывая соотношения (15), легко заметить с помощью соотношений (14), (9), (5), (1), что при $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ $(\lambda < 0)$ напряжения в вершине сектора равны нулю, при $\beta = \frac{\pi}{2}$ (полукруг, $\lambda = 0$) они конечны, а при $\frac{\pi}{2} < \beta \leqslant \pi$ $(\lambda > 0)$ имеют особенность $\sim r^{-\lambda}$. В последнем случае граничные условия на участке $r = R$, очевидно, не оказывают влияния на асимптотику решения при $r \to 0$.

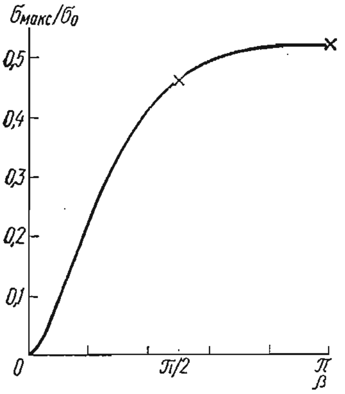

Рис. 1

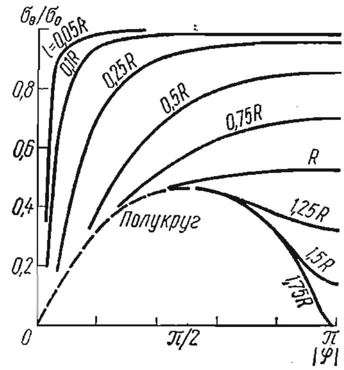

Рис. 2

На рис. 1 показана зависимость от β максимальных окружных напряжений $\sigma_{\text{макс}}$ на контуре $r = R$, возникающих в точке $\theta = 0$ $\left(\sigma_0 = \alpha E \frac{T_0 - T_R}{2}\right.$ — напряжение σ_θ на периферии сплошного диска при температурном поле (13)).

Полученные данные для $\beta = \pi$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ сравнивали с результатами расчета термоупругих напряжений в диске с радиальной краевой трещиной длиной $l = R$ и $l \to 2R$ (показаны на рис. 1 крестиками), выполненными по методике Либацкого [5] для $\sigma_0 > 0$. Напряжение на контуре диска с трещиной, расположенной на оси Ox, определяли из выражения

$$\sigma_\theta = \frac{E}{2\pi} \int_L \left[t + \cos\varphi + \frac{4t \sin^2\varphi \, (t\cos\varphi - 1)}{(1 + t^2 - 2t\cos\varphi)^2} \right] \mu(t)\, dt + \sigma_0, \tag{16}$$

где L — отрезок $[t_0, 1]$, $t_0 = 1 - \frac{l}{R}$; φ — полярный угол, отсчитываемый от оси Ox (начало координат в центре диска); $\mu(t)$ представляет собой скачок производной нормального перемещения на верхнем и нижнем берегах разреза:

$$\frac{\partial V^+}{\partial x} - \frac{\partial V^-}{\partial x} = \mu(t), \qquad t \in L. \tag{17}$$

Для определения $\mu(t)$ имеем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{E}{4\pi} \int_L K(x, t)\, \mu(t)\, dt + \frac{\sigma_0}{2}(3x^2 - 1) = 0, \qquad x \in L, \tag{18}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{t - x} + \frac{(1 + x^2)(1 + xt)}{x^3} + \frac{x}{1 - xt} - \frac{(1 - x^2)(2 + x^2)}{x^3 (1 - xt)^2} + \frac{(1 - x^2)^2}{x^3 (1 - xt)^3}. \tag{19}$$

В уравнении (18) член $\frac{\sigma_0}{2}(3x^2 - 1)$ представляет собой нормальное напряжение σ_θ в сплошном диске при температурном поле (13). Переменные x, t в выражениях (16) — (19) безразмерны (в долях R).

Приближенное решение уравнения (18) записываем в виде

$$\mu(t) = \frac{4\pi\sigma_0}{E}\left(\frac{c}{\sqrt{t-t_0}} + \sqrt{t-t_0}\sum_{n=0}^{m} a_n t^n\right). \qquad (20)$$

Коэффициенты c_0, a_0, a_1, ..., a_m находим, используя метод коллокаций таким образом, чтобы уравнение (18) удовлетворялось в точках, равномерно распределенных по отрезку $[t_0, 1]$:

$$x_k = t_0 + \frac{1-t_0}{1+m}k, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+1. \qquad (21)$$

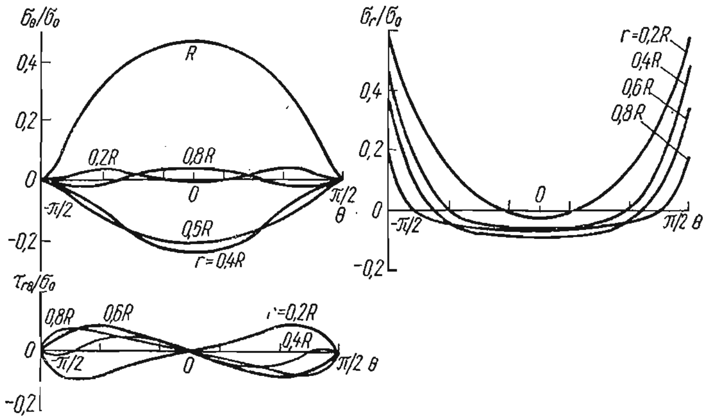

Рис. 3

Точность результатов зависит главным образом от величины m. Вычисления показывают, что для определения коэффициента c с погрешностью не более 1% необходимо увеличение m от $m = 3$ при $l \leqslant 0{,}9R$ до $m \sim 20$ при $l \sim$ $\sim 1{,}75R$.

Интересно проследить за изменением напряжений на контуре диска при увеличении длины трещины (рис. 2). Наличие трещины длиной менее $0{,}3R$ практически не сказывается на величине максимальных напряжений на контуре (уменьшает их по сравнению со сплошным диском не более чем на 5%). Влияние такой трещины существенно лишь в секторе $0 \leqslant |\varphi| \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{2}$. Трещина большей длины заметно изменяет напряженное состояние во всем объеме диска. Уровень максимальных напряжений постепенно снижается по мере увеличения длины трещины в промежутке $0 < l \leqslant 1{,}2R$ и в дальнейшем сохраняется неизменным, составляя примерно $0{,}47\sigma_0$. Точка, где действуют напряжения $\sigma_{\text{макс}}$, при $l \leqslant R$ лежит в конце диаметра, проходящего через линию трещины, а при $l > R$ резко смещается в положение конца диаметра, перпендикулярного ей. При $l \geqslant 1{,}75R$ происходит стабилизация напряженного состояния, заключающаяся в том, что распределение напряжений, за исключением небольшой области вблизи вершины трещины, перестает зависеть от ее длины, совпадая с напряженным состоянием в полукруге. Заметим, что стабилизация напряжений в области $0 \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$ наступает значительно раньше, уже при $l \sim 1{,}25R$.

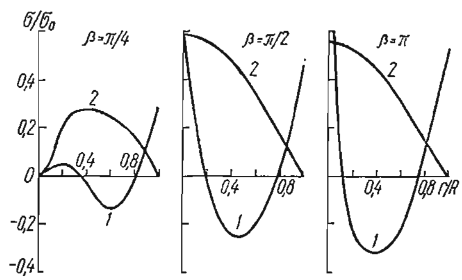

Рис. 4

Эпюры напряжений в полукруге (рис. 3), полученные предельным переходом $l \to 2R$, практически (различие не превышает 1,5%) совпадают с рассчитанными на основе рассмотренного выше вариационного процесса Ритца. Характерной особенностью распределения круговых напряжений в полукруге по сравнению со сплошным диском является смещение координаты нейтральной оси по направлению к контуру (с $0{,}59R$ до $0{,}77R$). Наблюдается также появление радиальных напряжений на прямолинейных участках боковой поверхности (того же знака, что и σ_0), величина которых несколько превышает уровень $\sigma_{\text{макс}}$ на криволинейной границе. Величина касательных напряжений не превосходит $0{,}1\sigma_0$.

На рис. 4 показано изменение напряжений σ_θ вдоль луча $\theta = 0$ (кривая *1*) и напряжений σ_r вдоль лучей $\theta = \pm\beta$ (кривые *2*) для некоторых значений β. Эти графики дают представление об изменении уровня максимальных напряжений в секторе при увеличении центрального угла 2β.

В заключение отметим, что результаты, приведенные на рис. 1, 3, 4, остаются в силе для более общего случая распределения температуры, чем описываемое выражением (13). А именно, они справедливы, если температура удовлетворяет уравнению

$$\Delta T = Q = \text{const} \tag{22}$$

при произвольных граничных условиях. В этом случае параметр σ_θ определяется выражением

$$\sigma_0 = \alpha E \frac{QR^2}{8}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964. 517 с.
2. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений. М., «Наука», 1971. 248 с.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1952. 695 с.
4. *Лабазин В. Г.* К вопросу о бигармонической задаче для кругового сектора.— Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1974, 52, № 3, с. 69—72.
5. *Либацкий Л. Л.* Всестороннее растяжение кругового диска с внешней радиальной трещиной.— ФХММ, 1969, 5, № 6, с. 758—760.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970. 512 с.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963. 734 с.
8. *Hanson K. L., Horvay G.* Thermal Stresses in a Sector Prism.— In. Proc. Third US Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, p. 313—322.
9. *Horvay G., Hanson K. L.* The Sector Problems.— J. Appl. Mech., 1957, 24, N 4, p. 574—581.
10. *Williams M. L.* Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular corners of Plates in Extension.— J. Appl. Mech., 1952, 19, N 4, p. 526—528.

г. Москва

Поступила в редколлегию 15.XII 1975 г.

УДК 62—50.5

П. М. Сеник, Б. И. Сокил

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается автономными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} + \beta y^n &= \varepsilon F(x, y, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} c_k P_k(x, y), \\ \dot{y} - \alpha x^m &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{l=1}^{M} d_l R_l(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$