3. *Губа В. М., Постольник Ю. С.* О критическом состоянии допускаемых параметров нагрева тел простой формы.— Проблемы прочности, 1971, № 8, с. 95—98.
4. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 304 с.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
6. *Лыков А. В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 5, с. 109—150.
7. *Михайлов М. Д.* Нестационарный тепло- и массоперенос в одномерных телах. ИТМО АН БССР, 1969. 182 с.
8. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963. 251 с.
9. *Постольник Ю. С.* Об одном приближенном методе решения задач нестационарной теплопроводности.— В кн.: Труды конференции «Теплофизика технологических процессов». Тольятти, 1972, с. 21—24.
10. *Постольник Ю. С., Гаранчук В. А., Губа В. М.* Исследование теплопроводности с переменными теплофизическими параметрами при граничных условиях второго рода.— Изв. вузов. Черная металлургия, 1974, № 6, с. 152—157.

Днепродзержинский индустриальный институт

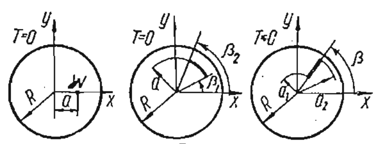
Поступила в редколлегию 17.XI 1975 г.

УДК 539.3

А. И. Уздалев, Е. Н. Брюханова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Круглая изотропная пластинка радиуса R нагревается сосредоточенным источником тепла постоянной интенсивности W. Положение источника определяется координатами $x = a$, $y = 0$ (рисунок, *а*). Контур пластинки поддерживается при нулевой температуре, а основания ее теплоизолированы. Внешние силы не действуют. Предположив независимость тепловых и механических характеристик материала от температуры, можно найти распределение напряжений.



а *б* *в*

Задача термоупругости сводится к интегрированию уравнений

$$\nabla^2 T = -\frac{W}{\lambda}\delta(x-a)\delta(y), \quad \nabla^2\nabla^2 F = -E\alpha\nabla^2 T, \tag{1}$$

где T и F — функции температур и напряжений; λ и α — коэффициенты теплопроводности и линейного расширения материала; E — модуль Юнга; δ — символ функции Дирака; ∇^2 — оператор Лапласа. На границе области функции T и F удовлетворяют условиям

$$T = 0, \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R. \tag{2}$$

Компоненты напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в полярной системе координат r, θ связаны с функцией F известными соотношениями. Решения уравнений (1) представляются в виде двух слагаемых

$$T = T_0 + T_1, \quad F = F_0 + F_1.$$

Первые слагаемые (T_0, F_0) являются общими решениями соответствующих однородных уравнений и имеют вид

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \rho^n \cos n\theta, \tag{3}$$

$$F_0 = (A_0\rho^2 + B_0) + (A_1\rho^3 + B_1\rho)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{n+2})\cos n\theta,$$

где M_n, A_n, B_n — постоянные интегрирования; $\rho = \frac{r}{a}$.

Вторые слагаемые (T_1, F_1) являются частными решениями неоднородных уравнений. Функции T_1 и F_1, содержащие особенность в точке, где расположен источник тепла, представляются так [4]:

$$T_1 = -\frac{W}{4\pi\lambda}\ln\left[\left(\frac{a}{a+2c}\right)^2\frac{\varphi}{\omega}\right],$$

$$\sigma_i^{(1)} = L\left\{\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{a}{a+2c}\right)^2\frac{\varphi}{\omega}\right] \pm \left(\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\omega}\right)\sin^2\theta\right\} \qquad (i = 1,\ 2), \tag{4}$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = -L\left[\frac{1}{2\rho}\left(1+\frac{\rho^2-1}{\varphi}\right)-\frac{1}{2\xi}\left(1+\frac{\xi^2-1}{\omega}\right)\right]\sin\theta.$$

Здесь знак «плюс» соответствует $i = 1$, а «минус» — $i = 2$;

$$\sigma_1^{(1)} = \sigma_r^{(1)}; \quad \sigma_2^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)}; \quad L = WE\alpha/4\pi\lambda; \quad \xi = \frac{r}{a+2c};$$

$$\varphi = 1+\rho^2-2\rho\cos\theta; \quad \omega = 1+\xi^2-2\xi\cos\theta.$$

Формулы (4) описывают температурное и напряженное состояние бесконечной пластинки с источником и стоком тепла, находящихся соответственно в точках с координатами $x = a$, $y = 0$ и $x = a + 2c$, $y = 0$. Параметр c удовлетворяет неравенству $2c > (R - a)$. Интенсивность источника и стока равна W.

Для определения постоянных интегрирования M_n, A_n, B_n разложим частное решение (4) на окружности радиуса r области $a < r < a + 2c$ в ряды Фурье

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\varkappa_n(r)\cos n\theta, \quad \sigma_r^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(r)\cos n\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(r)\sin n\theta,$$

где

$$\varkappa_0(r) = -\frac{W}{2\pi\lambda}\ln\left(\rho\frac{a}{a+2c}\right); \quad \varkappa_n(r) = -\frac{W}{2\pi\lambda}\frac{1}{n}\left(\xi^n-\rho^{-n}\right)$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$\gamma_0(r) = L\left[\ln\left(\rho\frac{a}{a+2c}\right)+\frac{\rho^{-2}-1}{2}\right]; \quad \gamma_1(r) = \psi_1(r) = \frac{L}{2}\left(\xi-2\rho^{-1}+\rho^{-3}\right);$$

$$\gamma_n(r) = \frac{L}{2}\left[\left(\frac{2}{n}+\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\right)\xi^n-\left(\frac{2}{n}+\frac{\rho^2-1}{\rho^2}\right)\rho^{-n}\right];$$

$$\psi_n(r) = \frac{L}{2}\left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\xi^n-\frac{\rho^2-1}{\rho^2}\rho^{-n}\right) \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Найденные из граничных условий (2) произвольные постоянные подставим в общее решение однородных уравнений (3). Решение, выраженное через бесконечные ряды, можно представить в аналитически замкнутом виде. Для такого представления необходимо использовать известные формулы суммирования [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n\cos n\theta = \frac{z(\cos\theta - z)}{\eta}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\cos n\theta = -\frac{1}{2}\ln\eta,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n\sin n\theta = \frac{z\sin\theta}{\eta}; \quad z < 1, \quad \eta = 1+z^2-2z\cos\theta, \tag{5}$$

а также выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\sin n\theta = \frac{z(1-z^2)\sin\theta}{\eta^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nz^n\cos n\theta = \frac{z[(z^2+1)\cos\theta-2z]}{\eta^2}. \tag{6}$$

Формулы суммирования (6) следуют из зависимостей

$$\frac{d}{d\theta}\sum_{n=1}^{\infty} z^n\begin{matrix}(-\cos n\theta)\\ \sin n\theta\end{matrix} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n\begin{matrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{matrix}$$

и соотношений (5).

Таким образом, общее решение однородных уравнений, как и частное решение неоднородных, удается записать в замкнутом виде. Окончательно формулы для компонентов напряжений представим так:

$$\sigma_r = \frac{L}{2\rho^2}\Big\{(A\rho^2 - 1) - \rho\cos\theta + (B\rho^2 + 1)(1 - k\rho\cos\theta)\nu -$$

$$- D\rho(1 - k\rho^2)\left[(1 + k^2\rho^2)\cos\theta - 2k\rho\right]\nu^2 + \rho^2\left[\ln(\nu\varphi) + \frac{2\sin^2\theta}{\varphi}\right]\Big\}, \tag{7}$$

$$\sigma_\theta = \frac{L}{2\rho^2}\Big\{(A\rho^2 + 1) + \rho\cos\theta + [(B + 2)\rho^2 - 1](1 - k\rho\cos\theta)\nu +$$

$$+ D\rho(1 - k\rho^2)\left[(1 + k^2\rho^2)\cos\theta - 2k\rho\right]\nu^2 + \rho^2\left[\ln(\nu\varphi) - \frac{2\sin^2\theta}{\varphi}\right]\Big\},$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{L}{2\rho^2}\left[\rho + k\rho(\rho^2 - 1)\nu + D\rho(1 - k\rho^2)(1 - k^2\rho^2)\nu^2 - \frac{2\rho^2(\rho - \cos\theta)}{\varphi}\right]\sin\theta,$$

где

$$\rho_1 = \frac{R}{a};\quad k = \frac{1}{\rho_1^2};\quad A = \frac{1}{\rho_1^2} - 2\ln\rho - 1;\quad B = 1 - \frac{2}{\rho_1^2};$$

$$D = \frac{1}{\rho_1^2} - 1;\quad \nu = (1 + k^2\rho^2 - 2k\rho\cos\theta)^{-1}.$$

Соотношения (7) справедливы во всех точках пластинки, за исключением центра ($\rho = 0$). Для получения решения в замкнутом виде при $\rho = 0$ исходим из выражений для компонентов напряжений через бесконечные ряды. Напряжения в центре пластинки оказываются равными выражениям

$$\sigma_r = \frac{L}{2}\{2\ln p + (1 - p^2)[1 - (1 - p^2)\cos 2\theta]\},$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{L}{2}(1 - p^2)^2\sin 2\theta,\quad p = \frac{a}{R}.$$

Закон изменения напряжений σ_θ вдоль контура области устанавливается на основании решения (7), в котором следует положить $\rho = \rho_1$, т. е.

$$\sigma_\theta = L\frac{(1 - p^2)^2}{1 + p^2 - 2p\cos\theta}. \tag{8}$$

Если принять $W = 1$, то формулу (8) можно рассматривать как функцию Грина для напряжений. Она может быть использована для определения напряжений, вызванных источниками тепла, распределенными по прямой, кривой или области.

Рассмотрим действие источников тепла, расположенных по дуге радиуса a в интервале изменения полярного угла от β_1 до β_2 (рисунок, *б*). Считаем, что интенсивность источников тепла постоянна и равна q. Используя функцию Грина и выполняя интегрирование по дуге, находим напряжение σ_θ на контуре пластинки:

$$\sigma_\theta = \frac{qE\alpha a(1 - p^2)^2}{4\pi\lambda}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{d\beta}{1 + p^2 - 2p\cos(\theta - \beta)}, \tag{9}$$

а окончательно

$$\sigma_\theta = \frac{qE\alpha a(1 - p^2)}{2\pi\lambda}[\Phi(\beta_2,\ \theta) - \Phi(\beta_1,\ \theta)],$$

$$\Phi(\beta_i,\ \theta) = \operatorname{arctg}\frac{(1 + p^2 - 2p\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} - 2p\sin\theta}{1 - p^2}\qquad (i = 1,\ 2). \tag{10}$$

Если источники тепла распределены по окружности радиуса a, то для определения напряжения необходимо в формуле (10) принять $\beta_1 = 0$, $\beta_2 =$

$= 2\pi$. В этом случае получаем

$$\sigma_\theta = \frac{WE\alpha (1 - p^2)}{4\pi\lambda}, \tag{11}$$

где $W = 2\pi aq$ — величина суммарной интенсивности.

Установим закон изменения напряжений вдоль границы пластинки, которая находится под влиянием источников тепла постоянной интенсивности q, распределенных по отрезку радиуса от $r = a_1$ до $r = a_2$. Угол между осью x и радиусом обозначим через β (рисунок, *в*). Для решения поставленной задачи используем функцию Грина. После выполнения интегрирования по переменной a в пределах от a_1 до a_2 формула для напряжения σ_θ принимает вид

$$H\sigma_\theta = C + M\cos\gamma + N\cos^2\gamma - 2\sin\gamma\,\{\sin 2\gamma\,[\ln\Psi(p_2, \beta, \theta) - \ln\Psi(p_1, \beta, \theta)] + 2\cos 2\gamma\,[\operatorname{arctg}\Omega(p_2, \beta, \theta) - \operatorname{arctg}\Omega(p_1, \beta, \theta)]\},$$

где

$$H = \frac{4\pi\lambda}{qE\alpha R};\quad \gamma = \theta - \beta;\quad C = \frac{1}{3}(p_2^3 - p_1^3) - 3(p_2 - p_1);$$

$$M = p_2^2 - p_1^2;\quad N = 4(p_2 - p_1);\quad \Psi(p_i, \beta, \theta) = 1 + p_i^2 - 2p_i\cos\gamma;$$

$$p_i = \frac{a_i}{R};\quad \Omega(p_i, \beta, \theta) = \frac{p_i - \cos\gamma}{\sin\gamma}\qquad (i = 1, 2).$$

Рассмотрим другой частный случай, когда источники тепла равномерно распределены по кольцу с внутренним радиусом a_1 и наружным a_2. Интенсивность источников тепла постоянна и равна q. Закон изменения напряжения вдоль контура пластинки описывается формулой

$$\sigma_\theta = WE\alpha(2 - p_2^2 - p_1^2)/8\pi\lambda,$$

где $W = \pi q(a_2^2 - a_1^2)$ — величина суммарной интенсивности.

Заметим, если источник тепла помещен в центре пластинки, то решение может быть получено путем предельного перехода ($a \to 0$), выполненного по одной из формул (8) — (11). Напряжение σ_θ тогда определяется так:

$$\sigma_\theta = \frac{WE\alpha}{4\pi\lambda}.$$

Эта формула совпадает с решением, найденным в работах [1, 3] иным способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бажанов В. Л. и др.* Расчет конструкций на тепловые воздействия. М., «Машиностроение», 1969. 600 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962. 1100 с.
3. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958. 168 с.
4. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1967. 168 с.

Саратовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 25.VI 1975 г.

УДК 539.377

И. И. Федик, В. И. Кожуховский, В. С. Егоров

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГОВОМ СЕКТОРЕ

Задача термоупругости для кругового сектора конечного радиуса рассматривалась в работах [4, 7, 8] с использованием методов ортогональных полиномов или тригонометрических рядов. Общим недостатком проведенных