

щей оболочки задан в виде  $e^{-r|\alpha|}$  или  $e^{-r\alpha^2}$ , то соответственно получаем

$$\delta_\lambda = \frac{r}{r^2 + \lambda^2}, \quad \delta_\lambda = r^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4r}}.$$

На ЭЦВМ произведены вычисления перемещений и силовых факторов оболочки при кусочно-постоянном распределении температуры для случаев постоянной и при наличии перепада температуры по толщине оболочки.

Приняты следующие параметры:  $R/h = 100$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = 0,125$ ,  $k = 1$ . На рис. 1 представлены кривые для продольного (1) и кругового (2) моментов

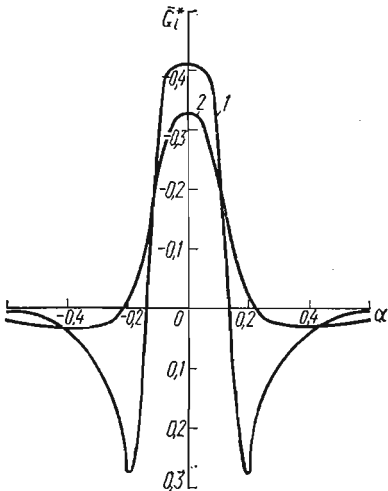


Рис. 1

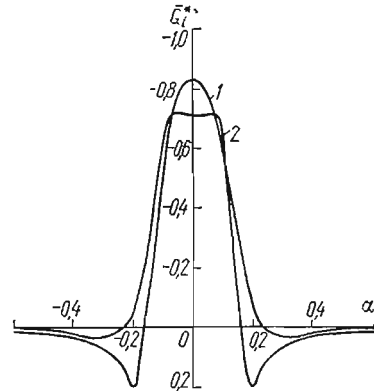


Рис. 2

в случае постоянной по толщине оболочки температуры при  $\beta = 0$ . Круговой момент, вычисленный в работе [3] на основе полубезмоментной теории, хорошо согласуется с представленными на рис. 1 значениями, найденными по общей теории оболочек. В случае перепада температуры по толщине оболочки кривые для продольного (1) и кругового (2) моментов представлены на рис. 2. Как и в первом случае, максимальное значение продольного момента несколько больше кругового. Отметим, что одно и то же значение температуры или перепада температуры вызывает в оболочке напряжения, превышающие напряжения в плоском теле или в пластинке, имеющих одинаковые нагретые зоны и размеры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
2. Подстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурные напряжения в оболочках. К., Изд-во АН УССР, 1961. 212 с.
3. Нерубайло Б. В., Смирнов В. С. Напряжения в круговой цилиндрической оболочке при локальном распределении температуры.— Труды УАИ, 1971, вып. 32, с. 69—76.
4. Богачев В. С., Нерубайло Б. В., Федик И. И. Изгиб прямоугольной пластины с горячим пятном.— Прочность конструкций, 1973, вып. 76, с. 21—28.

г. Москва

Поступила в редколлегию  
16.XII 1975 г.

УДК 536.12 : 539.319

Ю. С. Постольник, А. И. Золотарев, В. Н. Литвиненко

#### ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР И НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРЕ, НАГРЕВАЕМОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

Как известно [5], большинство точных решений краевых задач теплопроводности содержат экспоненциальные функции времени, а в регулярный период нагрева просто изменяются во времени по экспоненциальному

закону. В таком случае тепловой поток на тепловоспринимающей поверхности также будет представлять собой нестационарную экспоненциальную функцию. По закону, близкому к экспоненциальному, изменяется поверхностный тепловой поток при охлаждении слитков, при термической обработке токами высокой частоты, при прохождении космического аппарата через плотные слои атмосферы и во многих других случаях, встречающихся в современной промышленности и технике. Однако широкое практическое использование имеющихся точных решений соответствующих краевых задач нестационарной теплопроводности вызывает определенные трудности. Объясняется это чрезмерной сложностью точных решений, содержащих бесконечные ряды и специальные функции. Для примера приведем заимствованное из работы [7] точное решение задачи симметричного нагрева неограниченного цилиндра тепловым потоком, изменяющимся во времени по экспоненте:

$$\Theta(\xi, \tau) = \frac{2Ki_0}{\rho} \left\{ 1 - \exp(-\rho\tau) + \frac{\rho}{2} \exp(-\rho\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_n \xi)}{(\mu_n^2 - \rho) I_0(\mu_n)} - \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_n \xi)}{(\mu_n^2 - \rho) I_0(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 \tau) \right\}, \quad (1)$$

где  $\mu_n$  — требующие определения положительные корни уравнения  $J_1(\mu_n) = 0$ ;  $J_0, J_1$  — функции Бесселя нулевого и первого порядков. Еще большие трудности в смысле практического использования возникают, если конечной целью исследования являются не температуры, а термические напряжения. Все это вынуждает искать различные упрощенные пути теплового расчета соответствующих объектов, эксплуатируемых как в условиях металлургического производства, так и в других отраслях промышленности.

Рассмотрим краевую задачу нестационарной теплопроводности цилиндра радиуса  $R$  в следующей математической постановке:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = Ki(\tau) = Ki_0 \exp(-\rho\tau), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (4)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$\Theta(\xi, \tau) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_c - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad (6)$$

$$Ki_0 = \frac{q_0 R}{\lambda (T_c - T_0)}; \quad \rho = \frac{kR^2}{a};$$

$T_0$  — начальная температура;  $T_c$  — температура греющей среды;  $q_0$  — начальное значение поверхностного теплового потока  $q_n(t)$ ;  $k = \frac{1}{q_0} \times \max \left| \frac{dq_n(t)}{dt} \right|$  — характеристика максимальной скорости изменения теплового потока.

Для получения приближенного решения задачи (2) — (5) применен известный [9] метод эквивалентных источников (МЭИ) в сочетании с широко распространенной (см. обзор [6]) теорией теплового пограничного слоя, предусматривающей расчленение процесса нагрева на два кильватерных этапа: инерционный, описывающий начальный прогрев тела, и упорядоченный, когда температура изменяется по всему сечению.

Ограниченность объема статьи и достаточное количество публикаций по использованию МЭИ (см. библиографию в [9], а также работы [1, 2, 10]) позволяют опустить все промежуточные выкладки и привести окончательные приближенные решения поставленной задачи: на инерционном ( $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ) этапе

$$\Theta_1(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{Ki_0}{2|1-\beta(\tau)|} [\xi - \beta(\tau)]^2 \exp(-\rho\tau), & \beta(\tau) \leq \xi \leq 1, \\ 0, & 0 \leq \xi \leq \beta(\tau) \end{cases} \quad (7)$$

и на упорядоченном ( $\tau_0 \leq \tau < \infty$ ) —

$$\Theta_2(\xi, \tau) = \frac{2Ki_0}{\rho} \left\{ 1 + \left[ \frac{\rho\xi^2}{4} - \left( 1 + \frac{\rho}{12} \right) \right] \exp(-\rho\tau) \right\}, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (8)$$

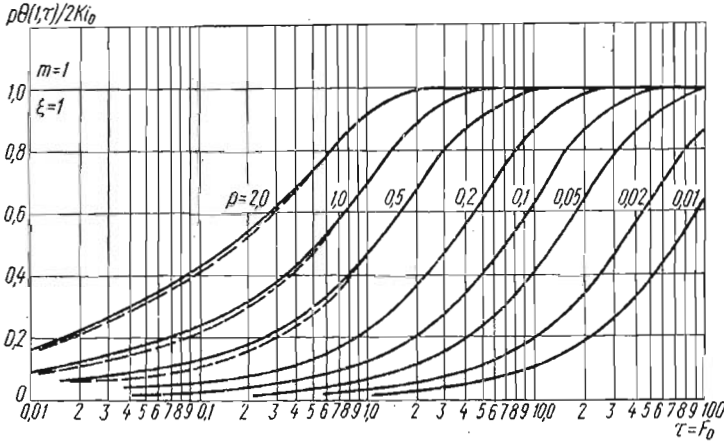


Рис. 1

Входящий в функцию (7) относительный радиус  $\beta(\tau)$  движущегося фронта теплового возмущения определяется следующим выражением:

$$\beta(\tau) = 1 - \sqrt{\frac{12}{\rho} \left[ \exp(\rho\tau) - 1 \right]}. \quad (9)$$

Полагая здесь  $\beta(\tau_0) = 0$ , приходим к формуле

$$\tau_0 = \frac{1}{\rho} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{12} \right), \quad (10)$$

детерминирующей время окончания инерционного этапа нагрева.

На рис. 1 приведена зависимость безразмерной температуры поверхности  $\frac{\rho\Theta(1, \tau)}{2Ki_0}$  и центра  $\frac{\rho\Theta(0, \tau)}{2Ki_0}$  цилиндра от безразмерного времени  $\tau = Fo$  для различных значений параметра  $\rho$ . Штриховой линией обозначено точное решение, сплошной — приближенное. Из графического сопоставления функций (7), (8) с точным решением (1) следует, что погрешность полученного приближенного решения лежит в пределах, вполне удовлетворяющих требованиям практики.

Очевидно, что простота полученных приближенных функций позволяет весьма эффективно производить расчет не только полей температур, но и вызванных ими полей напряжений. Для этого достаточно подставить в известные (например, [4, 8]) общие решения задачи квазистатической термоупругости полученные приближенные выражения температур. При этом вследствие использования модели термического слоя подстановку функции  $\Theta(\xi, \tau)$  необходимо осуществлять в соответствии с этой моделью, т. е. как в ряде работ (например [11]).

Окончательные приближенные формулы термоупругих напряжений в цилиндре, симметрично нагреваемом нестационарным тепловым потоком

(3), принимают следующий вид:

$$\bar{\sigma}_r^{(0)} \left\{ = \Delta\Theta_1(\tau) \frac{4[1-\beta(\tau)] - [1-\beta(\tau)]^2}{12} \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ 0 \leq \xi \leq \beta(\tau) \end{array} \right), \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)} = \bar{\sigma}_r^{(0)} - \Delta\Theta_1(\tau) \frac{4\xi[\xi-\beta(\tau)]^3 - [\xi-\beta(\tau)]^4}{12\xi^2[1-\beta(\tau)]^2}, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_\theta^{(1)} = \bar{\sigma}_\theta^{(0)} - \Delta\Theta_1(\tau) \frac{4\xi[\xi-\beta(\tau)]^2[2+\beta(\tau)] - [\xi-\beta(\tau)]^4}{12\xi^2[1-\beta(\tau)]^2} \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ \beta(\tau) \leq \xi \leq 1 \end{array} \right),$$

$$\bar{\sigma}_r^{(2)} = \Delta\Theta_2(\tau) \frac{1-\xi^2}{4}, \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_\theta^{(2)} = \Delta\Theta_2(\tau) \frac{1-3\xi^2}{4} \quad \left( \begin{array}{l} \tau_0 \leq \tau < \infty, \\ 0 \leq \xi \leq 1 \end{array} \right).$$

Здесь  $\Delta\Theta_1(\tau)$  и  $\Delta\Theta_2(\tau)$  — относительные перепады температур по сечению цилиндра:

$$\Delta\Theta_1(\tau) = \frac{Ki_0[1-\beta(\tau)]}{2} \exp(-\rho\tau); \quad \Delta\Theta_2(\tau) = \frac{Ki_0}{2} \exp(-\rho\tau); \quad (14)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{K_\sigma}; \quad K_\sigma = \frac{\alpha E(T_c - T_0)}{1-\mu}.$$

Полагая в выражении (11)  $\beta(\tau_0) = 0$ , приходим к формуле максимальных радиальных растягивающих напряжений в центре сечения цилиндра:

$$\bar{\sigma}_r^{(0)}(0, \tau_0) = \max \bar{\sigma}_r = \frac{\Delta\Theta_1(\tau)}{4} = \frac{Ki_0}{8 \left(1 + \frac{\rho}{12}\right)}. \quad (15)$$

В этот момент круговое напряжение на поверхности цилиндра отрицательно и согласно формуле (12) равно

$$\bar{\sigma}_\theta^{(1)}(1, \tau_0) = -\frac{Ki_0}{6 \left(1 + \frac{\rho}{12}\right)}, \quad (16)$$

а в центре сечения оно совпадает с  $\bar{\sigma}_r(0, \tau_0)$  (15) по величине и знаку.

На рис. 2 приведено распределение максимальных напряжений по сечению цилиндра в момент окончания инерционного этапа  $\tau = \tau_0 = \Gamma_0$  для различных значений параметра  $\rho$ . Штрихпунктирными линиями обозначены радиальные напряжения  $\frac{\rho\bar{\sigma}_r(\xi, \tau_0)}{2Ki_0}$ , сплошными — круговые  $\frac{\rho\bar{\sigma}_\theta(\xi, \tau_0)}{2Ki_0}$ .

Простота полученных для напряжений формул позволяет производить не только их числовой расчет, но и сделать качественный анализ термонапряженного состояния, что при использовании точных решений не всегда легко удается.

Так, из формул (11) — (16) видно, что напряжения возрастают только в период инерционного этапа нагрева, в дальнейшем же они падают. Последнее явление весьма существенно, так как при нагреве постоянным тепловым потоком уровень напряженности сохраняется максимальным. Формулы (15), (16) также показывают, что максимальные напряжения с увеличением показателя  $\rho$  скорости изменения поверхностного теплового потока уменьшаются. Таким образом, выбором параметра  $\rho$  можно добиться оптимального режима, когда будет обеспечена требуемая скорость нагрева при соблюдении соответствующих гарантий прочности.

На рис. 3 приведены зависимости безразмерных напряжений центра  $\frac{\rho \bar{\sigma}(0, \tau)}{2Ki_0}$  и поверхности  $\frac{\rho \bar{\sigma}(1, \tau)}{2Ki_0}$  шара от безразмерного времени  $\tau = \tau_0$  для различных значений параметра  $\rho$ , которые наглядно иллюстрируют сделанные выше выводы.

Чтобы определение напряженного состояния цилиндра было законченным, необходимо еще остановиться на осевых напряжениях  $\sigma_z(\xi, \tau)$ . Здесь, как известно, необходимо учитывать условия закрепления цилиндра.

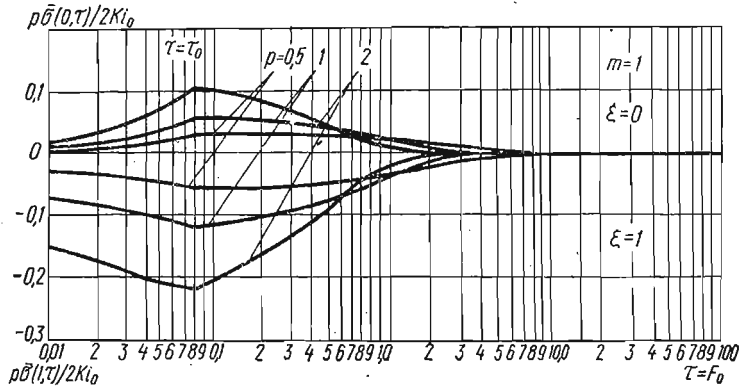


Рис. 3

Так, если торцы цилиндра свободны, то  $\sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta$ , а если они закреплены, то  $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha E(T_c - T_0)$ . Учитывая это, нетрудно вывести выражения для  $\sigma_z$ , имея  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\Theta(\xi, \tau)$ . Мы здесь ограничимся приведением формул только для поверхности и центра сечения цилиндра в момент времени  $\tau = \tau_0$ . При свободных торцах

$$\bar{\sigma}_z^{(0)}(0, \tau_0) = \frac{Ki_0}{4\left(1 + \frac{\rho}{12}\right)}, \quad \bar{\sigma}_z^{(1)}(1, \tau_0) = -\frac{Ki_0}{4\left(1 + \frac{\rho}{12}\right)} \quad (17)$$

и при закрепленных —

$$\bar{\sigma}_z^{(0)}(0, \tau_0) = \frac{\mu Ki_0}{4\left(1 + \frac{\rho}{12}\right)}, \quad \bar{\sigma}_z^{(1)}(1, \tau_0) = -\frac{(2 - \mu) Ki_0}{4\left(1 + \frac{\rho}{12}\right)}. \quad (18)$$

Необходимо отметить, что при  $\rho = 0$  все полученные результаты совпадают с известными [3], соответствующими нагреву постоянным тепловым потоком.

Итак, получены весьма простые, достаточно точные и удобные для практического пользования приближенные формулы температур и термических напряжений, возникающих в цилиндре при нагреве нестационарным тепловым потоком, изменяющимся по экспоненте. Возможность их эффективного использования определяется тем, что цилиндр является одной из самых распространенных деталей не только металлургического оборудования. Конструкции цилиндрической формы широко применяются в авиационной, нефтяной и газовой промышленности, машиностроении, теплоэнергетике, строительстве

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гаранчук В. А., Постольник Ю. С., Губа В. М. Температурные поля и напряжения в телах простой геометрии с зависящими от температуры теплофизическими параметрами. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1974, № 3, с. 32—36.
2. Гаранчук В. А., Постольник Ю. С., Губа В. М. Поля температур и напряжений в телах простой геометрии. — Изв. вузов. Машиностроение, 1974, № 6, с. 8—14.

3. Губа В. М., Постольник Ю. С. О критическом состоянии допускаемых параметров нагрева тел простой формы.— Проблемы прочности, 1971, № 8, с. 95—98.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 304 с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
6. Лыков А. В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 5, с. 109—150.
7. Михайлов М. Д. Нестационарный тепло- и массоперенос в одномерных телах. ИТМО АН БССР, 1969. 182 с.
8. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963. 251 с.
9. Постольник Ю. С. Об одном приближенном методе решения задач нестационарной теплопроводности.— В кн.: Труды конференции «Теплофизика технологических процессов». Тольятти, 1972, с. 21—24.
10. Постольник Ю. С., Гаранчук В. А., Губа В. М. Исследование теплопроводности с переменными теплофизическими параметрами при граничных условиях второго рода.— Изв. вузов. Черная металлургия, 1974, № 6, с. 152—157.

Днепродзержинский индустриальный институт

Поступила в редколлегию  
17.XI 1975 г.

УДК 539.3

А. И. Уздалев, Е. Н. Брюханова

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Круглая изотропная пластинка радиуса  $R$  нагревается сосредоточенным источником тепла постоянной интенсивности  $W$ . Положение источника определяется координатами  $x = a$ ,  $y = 0$  (рисунок, а). Контур пластинки поддерживается при нулевой температуре, а основания ее теплоизолированы. Внешние силы не действуют. Предположив независимость тепловых и механических характеристик материала от температуры, можно найти распределение напряжений.

Задача термоупругости сводится к интегрированию уравнений

$$\nabla^2 T = -\frac{W}{\lambda} \delta(x-a) \delta(y), \quad \nabla^2 \nabla^2 F = -E\alpha \nabla^2 T, \quad (1)$$

где  $T$  и  $F$  — функции температур и напряжений;  $\lambda$  и  $\alpha$  — коэффициенты теплопроводности и линейного расширения материала;  $E$  — модуль Юнга;  $\delta$  — символ функции Дирака;  $\nabla^2$  — оператор Лапласа. На границе области функции  $T$  и  $F$  удовлетворяют условиям

$$T = 0, \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (2)$$

Компоненты напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  в полярной системе координат  $r$ ,  $\theta$  связаны с функцией  $F$  известными соотношениями. Решения уравнений (1) представляются в виде двух слагаемых

$$T = T_0 + T_1, \quad F = F_0 + F_1.$$

Первые слагаемые ( $T_0$ ,  $F_0$ ) являются общими решениями соответствующих однородных уравнений и имеют вид

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \rho^n \cos n\theta, \quad (3)$$

$$F_0 = (A_0 \rho^2 + B_0) + (A_1 \rho^3 + B_1 \rho) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{n+2}) \cos n\theta,$$

где  $M_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  — постоянные интегрирования;  $\rho = \frac{r}{a}$ .

Вторые слагаемые ( $T_1$ ,  $F_1$ ) являются частными решениями неоднородных уравнений. Функции  $T_1$  и  $F_1$ , содержащие особенность в точке, где рас-