

от времени при фиксированной координате. Ввиду симметричности задачи относительно срединной поверхности пластинки графики приведены только для полутолщины пластинки при $0 \leq z \leq \delta$. Как видно из графика рис. 2, в произвольную точку h внутри бесконечной пластины при $0 \leq z \leq \delta$ в момент времени $t = P(1 - h)$ приходит фронт упругой волны, возникающей в результате теплового удара по поверхности $z = \delta$, а в момент $t = P(1 + h)$ — фронт упругой волны, возникающей в результате теплового удара по поверхности $z = -\delta$. При $-\delta < z < 0$ в произвольную точку внутри бесконечной пластинки в момент времени $t = P(1 - h)$ приходит фронт упругой волны, возникающей от теплового удара по поверхности $z = -\delta$, а затем в момент $t = (1 + h)P$ — фронт упругой волны, возникающей от теплового удара по поверхности $z = \delta$. В таком же порядке в моменты времени $t = P(2n + 1 \pm h)$ приходит к этой же точке фронт отраженных от соответствующих поверхностей пластинки упругих волн ($n = 1, 2, 3, \dots$). Максимальные по величине напряжения возникают, как видно из графика рис. 3, при $h = 0$, т. е. на срединной поверхности пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963. 251 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высш. школа», 1965. 465 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 25.XII 1975 г.

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, В. И. Громык, Л. Я. Кузьменко

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛП ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Рассмотрим бесконечную стеклянную пластинку толщиной 2δ с круговым коваровым включением такой же толщины и радиуса R (рис. 1). Боковая поверхность $z = -\delta$ пластинки теплоизолирована. Через поверхность $z = \delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой температуры $t_c(\tau)$ по закону Ньютона, причем коэффициент теплоотдачи является функцией времени $\alpha(\tau)$. Температура включения принимается равной температуре среды. Начальная температура системы равна 0. Условие теплоизоляции по поверхности $z = -\delta$ эквивалентно условию симметрии пластинки толщиной $2h$ ($h = \delta$) относительно плоскости $\zeta = 0$, через поверхности $\zeta = \pm h$ которой осуществляется теплообмен с внешней средой температуры t_c по закону Ньютона. Уравнение для определения интегральной характеристики температуры $\vartheta = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t d\zeta$, соответствующее квадратичному закону изменения температуры t по толщине $2h$ пластинки, имеет вид [2]

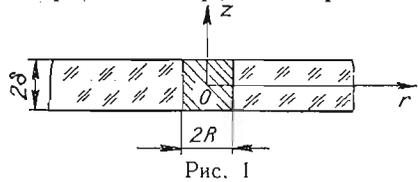


Рис. 1

где

$$\rho^2 \vartheta - \kappa^2(\tau) [\vartheta - t_c(\tau)] = 0, \quad (1)$$

где

$$\rho^2 = \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \kappa^2(\tau) = \frac{3\alpha(\tau)}{[3\lambda + h\alpha(\tau)]h};$$

a, λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; τ — время;

$$t = \left(1 + \frac{\rho^2 h^2}{6}\right) \vartheta - \frac{\rho^2 \xi^2}{2} \vartheta. \quad (2)$$

Краевые условия имеют такой вид:

$$\vartheta|_{r=R} = t_c(\tau), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \vartheta|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

С помощью замены [1]

$$\vartheta = \theta f(\tau) \quad (4)$$

краевая задача (1), (3) преобразуется к виду

$$\rho^2 \theta = -\theta_c^*, \quad (5)$$

$$\theta|_{r=R} = \theta_c, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \theta|_{\tau=0} = 0, \quad (6)$$

где

$$\theta_c^* = \kappa^2(\tau) \theta_c, \quad \theta_c = t_c(\tau) f^{-1}(\tau), \quad f(\tau) = e^{-a \int_0^\tau \kappa^2(\tau) d\tau}.$$

Используя интегральное преобразование Лапласа по τ , изображение функции θ находим в виде

$$\bar{\theta} = (s\bar{\theta}_c - a\bar{\theta}_c^*) \frac{K_0\left(r \sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{sK_0\left(R \sqrt{\frac{s}{a}}\right)} + \frac{a\bar{\theta}_c^*}{s}, \quad (7)$$

где $K_0(\eta)$ — функция Макдональда.

Возникающие в системе температурные напряжения определим по известным [3] формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{jj}^{(1)} &= \frac{N_j^{(1)}}{2\delta} + \frac{3z}{2\delta^3} M_j^{(1)}, \quad j = r, \varphi; \\ \sigma_{jj}^{(2)} &= \frac{N_j^{(2)}}{2\delta} + \frac{3z}{2\delta^3} M_j^{(2)} + \frac{\alpha_i^{(2)} E_2}{1 - \nu_2} \left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{\delta^2}\right) \frac{T_2^*}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$N_r^{(i)} = \frac{g_i}{1 - \nu_i^2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial r} + \nu_i \frac{u_i}{r} - \alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) T_i \right], \quad i = 1, 2; \quad T_i = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t_i dz;$$

$$N_\varphi^{(i)} = \frac{g_i}{1 - \nu_i^2} \left[\nu_i \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} - \alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) T_i \right], \quad T_1 = t_c, \quad T_2 = \vartheta;$$

$$M_r^{(i)} = -D_i \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{\nu_i}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) \frac{T_i^*}{\delta} \right]; \quad T_i^* = \frac{3}{2\delta^3} \int_{-\delta}^{\delta} z t_i dz; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_\varphi^{(i)} &= -D_i \left[\nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) \frac{T_i^*}{\delta} \right], \quad T_1^* = 0, \quad T_2^* = \\ &= -\rho^2 \delta^2 \vartheta; \end{aligned}$$

$$g_i = 2E_i \delta; \quad D_i = 2E_i \delta^3 / 3(1 - \nu_i^2); \quad \alpha_i^{(i)}, E_i, \nu_i —$$

температурные коэффициенты линейного расширения, модули упругости и коэффициенты Пуассона;

$$t_2 = \left(1 + \frac{2}{3} \rho^2 \delta^2\right) \vartheta - \frac{\rho^2 (z + \delta)^2}{2} \vartheta;$$

радиальные перемещения и прогиб удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\Delta u_i - \frac{u_i}{r^2} = \alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) \frac{\partial T_i}{\partial r}, \quad (10)$$

$$\Delta \Delta w_i = -\alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) \Delta \frac{T_i^*}{\delta}. \quad (11)$$

Граничные условия в случае свободно опертой на бесконечности пластинки запишутся в виде

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \quad w_1 \neq \infty, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \neq \infty \quad \text{при } r = 0; \\ u_1 = u_2, \quad N_r^{(1)} = N_r^{(2)}, \quad M_r^{(1)} = M_r^{(2)}, \quad Q_r^{(1)} = Q_r^{(2)}, \\ w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r} \quad \text{при } r = R; \\ N_r^{(2)} = 0, \quad M_r^{(2)} = 0, \quad w_2 = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$Q_r^{(i)} = -D_i \frac{\partial}{\partial r} \left[\Delta w_i + \alpha_i^{(i)} (1 + \nu_i) \frac{T_i^*}{\delta} \right]. \quad (13)$$

С помощью замены

$$\sigma = \tilde{\sigma} f(\tau) \quad (14)$$

преобразуем (8), (13) к соотношениям, уравнениям и граничным условиям, которые после применения к ним преобразования Лапласа запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} &= \frac{\tilde{N}_j^{(1)}}{2\delta} + \frac{3z}{2\delta^3} \tilde{M}_j^{(1)}, \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} &= \frac{\tilde{N}_j^{(2)}}{2\delta} + \frac{3z}{2\delta^3} \tilde{M}_j^{(2)} - \frac{E_2 (\delta^2 - 3z^2)}{6(1 - \nu_2^2) \delta} \bar{P}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_r^{(1)} &= \frac{g_1}{1 - \nu_1^2} \left[\frac{d\tilde{u}_1}{dr} + \frac{\nu_1}{r} \tilde{u}_1 - \alpha_i^{(1)} (1 + \nu_1) \bar{\theta}_c \right], \\ \tilde{N}_\varphi^{(1)} &= \frac{g_1}{1 - \nu_1^2} \left[\nu_1 \frac{d\tilde{u}_1}{dr} + \frac{\tilde{u}_1}{r} - \alpha_i^{(1)} (1 + \nu_1) \bar{\theta}_c \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_r^{(2)} &= \frac{g_2}{1 - \nu_2^2} \left[\frac{d\tilde{u}_2}{dr} + \frac{\nu_2}{r} \tilde{u}_2 - \alpha_i^{(2)} (1 + \nu_2) \bar{\theta} \right], \\ \tilde{N}_\varphi^{(2)} &= \frac{g_2}{1 - \nu_2^2} \left[\nu_2 \frac{d\tilde{u}_2}{dr} + \frac{\tilde{u}_2}{r} - \alpha_i^{(2)} (1 + \nu_2) \bar{\theta} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_r^{(1)} &= -D_1 \left(\frac{d^2 \tilde{w}_1}{dr^2} + \frac{\nu_1}{r} \frac{d\tilde{w}_1}{dr} \right), \quad \tilde{M}_\varphi^{(1)} = -D_1 \left(\nu_1 \frac{d^2 \tilde{w}_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{w}_1}{dr} \right), \\ \tilde{M}_r^{(2)} &= -D_2 \left[\frac{d^2 \tilde{w}_2}{dr^2} + \frac{\nu_2}{r} \frac{d\tilde{w}_2}{dr} - \bar{P} \right], \\ \tilde{M}_\varphi^{(2)} &= -D_2 \left[\nu_2 \frac{d^2 \tilde{w}_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{w}_2}{dr} - \bar{P} \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta \bar{u}_1 = \frac{\bar{u}_1}{r^2}, \quad \Delta \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2}{r^2} = \alpha_i^{(2)} (1 + \nu_2) \frac{d\bar{v}}{dr}; \quad (18)$$

$$\Delta \Delta \bar{\omega}_1 = 0, \quad \Delta \Delta \bar{\omega}_2 = \Delta \bar{P}; \quad (19)$$

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{\omega}_1 \neq \infty, \quad \frac{d^2 \bar{\omega}_1}{dr^2} \neq \infty \quad \text{при } r = 0,$$

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \bar{N}_r^{(1)} = \bar{N}_r^{(2)}, \quad \bar{M}_r^{(1)} = \bar{M}_r^{(2)}, \quad \bar{Q}_r^{(1)} = \bar{Q}_r^{(2)}, \quad (20)$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2, \quad \frac{d\bar{\omega}_1}{dr} = \frac{d\bar{\omega}_2}{dr} \quad \text{при } r = R,$$

$$\bar{M}_r^{(2)} = 0, \quad \bar{N}_r^{(2)} = 0, \quad \bar{\omega}_2 = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty;$$

$$\bar{Q}_r^{(1)} = -D_1 \frac{d}{dr} (\Delta \bar{\omega}_1), \quad \bar{Q}_r^{(2)} = -D_2 \frac{d}{dr} (\Delta \bar{\omega}_2 - \bar{P}), \quad (21)$$

где

$$\bar{P} = \alpha_i^{(2)} (1 + \nu_2) \delta \left[\Delta \bar{\theta} - \frac{s}{a} \bar{\theta} + \bar{\theta}_\kappa \right], \quad \theta_\kappa = \theta \kappa^2 (\tau).$$

Решая уравнения (18), (19) при граничных условиях (20), подставляя затем полученные решения для \bar{u}_i , $\bar{\omega}_i$ в (16), (17) и переходя по формуле обращения от изображений к оригиналам, находим

$$\bar{N}_r^{(1)} = \bar{N}_\varphi^{(1)} = 2\delta E_0 \alpha_i^{(2)} [\Omega + (1 - \varepsilon) \theta_c], \quad \bar{M}_r^{(1)} = \bar{M}_\varphi^{(1)} = -\frac{2}{3} \delta^4 E_0 \alpha_i^{(2)} \kappa^2 (\tau) \Omega,$$

$$\bar{N}_r^{(2)} = \frac{R^2}{r^2} \bar{N}_r^{(1)} + \frac{\alpha_i^{(2)} g_2}{r} \left[\frac{R}{r} \varphi(R, \tau) - \varphi(r, \tau) \right],$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_\varphi^{(2)} = -\bar{N}_r^{(2)} - g_2 \alpha_i^{(2)} \psi(r, \tau), \quad \bar{M}_r^{(2)} = D_2 \alpha_i^{(2)} \delta (1 - \nu_2^2) \frac{\kappa^2 (\tau)}{r} \left[\varphi(r, \tau) - \right. \\ \left. - \frac{R}{r} \varphi(R, \tau) - \Omega \frac{R^2}{r} \frac{E_0}{E_2 (1 + \nu_2)} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{M}_\varphi^{(2)} = -\bar{M}_r^{(2)} + D_2 (1 - \nu_2^2) \kappa^2 (\tau) \psi(r, \tau) \alpha_i^{(2)} \delta,$$

где

$$\Omega = a \int_0^\tau \theta_c^* (\eta) d\eta - \theta_c; \quad E_0 = \frac{E_1 E_2}{(1 - \nu_1) E_2 + (1 + \nu_2) E_1}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha_i^{(1)}}{\alpha_i^{(2)}};$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, \tau) = \frac{2}{\pi} a \int_0^\infty P_1(r, \eta) e^{-a\eta^2 \tau} \int_0^\tau \left[\theta_c(\beta) e^{a\eta^2 \beta} - \right. \\ \left. - \frac{\theta_c^*(\beta)}{\eta^2} (e^{a\eta^2 \tau} - e^{a\eta^2 \beta}) \right] d\beta d\eta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(r, \tau) = -\Omega + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P_0(r, \eta) e^{-a\eta^2 \tau} \left[e^{a\eta^2 \tau} \theta_c - \right. \\ \left. - a \int_0^\tau (\theta_c \eta^2 + \theta_c^*) e^{a\eta^2 \beta} d\beta \right] \frac{d\eta}{\eta}; \quad P_n(r, \eta) = \\ = \frac{J_n(r\eta) Y_0(\eta R) - Y_n(r\eta) J_0(\eta R)}{J_0^2(\eta R) + Y_0^2(\eta R)}; \end{aligned}$$

$J_n(\xi)$, $Y_n(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $n = 0, 1$.

Исследуем температурные напряжения в стеклянной пластинке ($\alpha_l^{(2)} = 5 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $E_2 = 0,66 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $\nu_2 = 0,22$) на ее стыке ($r = R$) с коваровым ($\alpha_l^{(1)} = 5,2 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $E_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $\nu_1 = 0,3$) включением при изменении во времени температуры внешней среды и критерия Био (рис. 2) по законам

$$t_c = T_c S_+(Fo), \quad Bi(Fo) = \frac{3}{5e^{Fo} - 2}, \quad (23)$$

где

$$S_+(Fo) = \begin{cases} 1, & Fo > 0, \\ 0, & Fo \leq 0, \end{cases} \quad T_c = 77^\circ\text{C}, \quad Fo = \frac{\alpha \tau}{\delta^2}, \quad Bi = \frac{\alpha(\tau) \delta}{\lambda}.$$

В этом случае мембранные напряжения и напряжения изгиба при $z = \delta$ запишутся так:

$$\sigma_r = \alpha_l^{(2)} E_2 [(1 - \varepsilon) T_c S_+(Fo) - K(Fo)], \quad (24)$$

$$\sigma_\varphi = -\sigma_r - \alpha_l^{(2)} E_2 K(Fo), \quad K(Fo) = T_c S_+(Fo) e^{-0,3(1-e^{-Fo})};$$

$$\sigma_r^* = 0,3 \alpha_l^{(2)} K(Fo) e^{-Fo}, \quad \sigma_\varphi^* = \sigma_r^* \left(\frac{E_2}{E_0} - 1 \right). \quad (25)$$

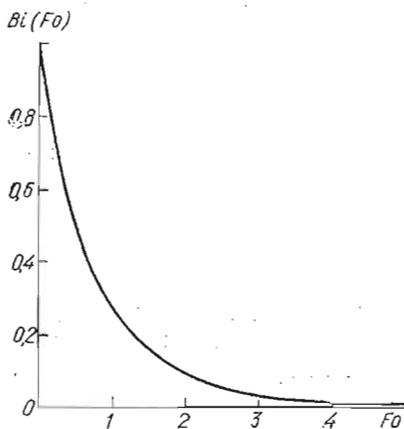


Рис. 2

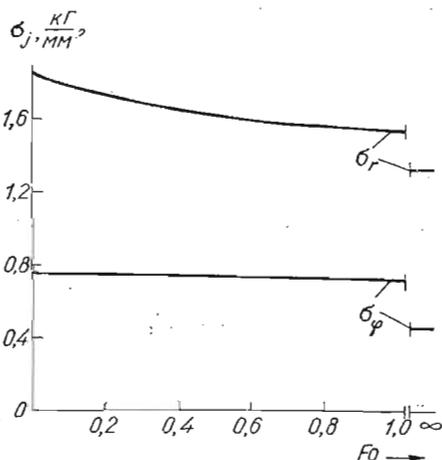


Рис. 3

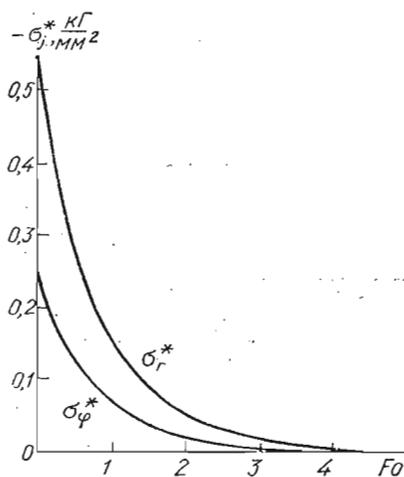


Рис. 4

Произведенные по формулам (24), (25) расчеты температурных напряжений представлены соответственно на рис. 3, 4, из которых видно, что мембранные напряжения значительно превышают напряжения изгиба.

Рассмотренная задача термоупругости приближенно описывает температурные напряжения, возникающие в металл-стеклянных спаях электронных приборов при их испытаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляно Ю. М., Громовык В. И. Температурные напряжения в ортотропных пластинках с переменным коэффициентом теплоотдачи. — Прикл. механика, 1972, 8, № 1, с. 56—61.
2. Лозбень В. Л. Температурные напряжения в анизотропных и изотропных телах при переменных коэффициентах теплоотдачи. Автореф. канд. дис. Львов, 1974. 18 с.

УДК 539.377

В. А. Волос, А. М. Марголин

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ГАЗОНАПОЛНЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ
ПРИ ВНЕШНЕМ НАГРЕВЕ**

При откачке цветных кинескопов иногда применяют режим их вакуумного обезгаживания, при котором форвакуумные насосы включают после подъема температуры внешней поверхности оболочки до 189° С. При этом воздух,

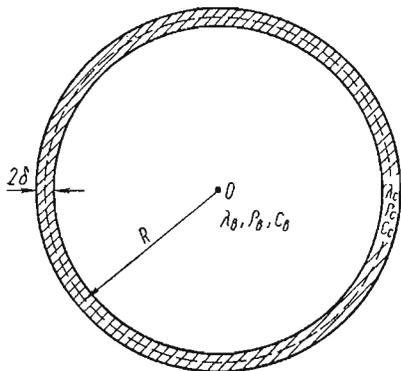


Рис. 1

находящийся внутри оболочки, изолирован последней и системой вакуумного затвора от нагревателей. Этот режим является наиболее опасным в связи с образованием больших термонапряжений, чем при обычной откачке или термообработке в электрических печах.

Рассмотрим сферическую оболочку, заполненную воздухом (рис. 1). Начальная температура такой системы равна t_0 . Температура поверхности $r = R$ предполагается заданной функцией времени. Рассматривая оболочку как покрытие, для определения нестационарного температурного поля в воздушном шаре имеем уравнение теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 t_b}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t_b}{\partial r} = \frac{1}{a_b} \frac{\partial t_b}{\partial \tau} \quad (1)$$

и краевые условия

$$\frac{C_c}{2} \frac{\partial t_b}{\partial \tau} = -\lambda_b \frac{\partial t_b}{\partial r} + h_c (t_c^+ - t_b) \text{ при } r = R, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial t_b}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (3)$$

$$t_c^+ = t_0 = 30^\circ \text{C при } \tau = 0. \quad (4)$$

Здесь $a_b = \frac{\lambda_b}{c_b^v}$ — коэффициент температуропроводности воздуха; λ_b, λ_c — коэффициенты теплопроводности воздуха и стекла соответственно; c_b^v, c_c^v — их объемные теплоемкости; $C_c = 2\delta c_c^v, h_c = \lambda_c (2\delta)^{-1}$ — приведенная теплоемкость и теплопроводность материала покрытия; 2δ — толщина покрытия; R — срединный радиус.

Здесь и далее индексами «в», «с» обозначены величины, относящиеся соответственно к воздуху и стеклу, а индексами «+» и «-» — граничные значения соответствующих величин на внешней и внутренней поверхностях оболочки.

Применяя к уравнениям (1) — (3) преобразование Лапласа по τ с учетом условия (4), получаем

$$\frac{d^2 \bar{t}_b}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{t}_b}{dr} = \frac{s}{a_b} \bar{t}_b - \frac{t_0}{a_b}, \quad (5)$$