

званных возмущением напряженного состояния около отверстия. Отметим, что $k_1^- > k_1^+$, т. е. распространение трещины происходит со стороны отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С. Метод дисторсии в теории термоупругости тел с трещинами.— ФХММ, 1975, № 3, с. 9—20.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966. 707 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958. 543 с.
4. Панасюк Б. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., «Наук. думка», 1968. 246 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 15.XII 1975 г.

УДК 539.377

Ф. В. Семерак, О. И. Борисенко

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ**

Рассмотрим изотропную бесконечную пластинку толщины 2δ (рис. 1), температура поверхностей $z = \pm\delta$ которой изменяется в начальный момент времени на некоторую величину t_0 , оставаясь в дальнейшем постоянной. Для определения возникающего в пластинке нестационарного температурного поля имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1}$$

и краевые условия

$$T(z, \tau) = t_0 S_+(z) \quad \text{при } z = \pm \delta, \tag{2}$$

$$T(z, \tau) = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \tag{3}$$

где a — коэффициент температуропроводности; τ — время; $S_+(z)$ — асимметричная единичная функция.

С помощью интегрального преобразования Лапласа по времени τ , находим изображение температуры в пластинке

$$\bar{T} = \frac{t_0}{s} \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} z}{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta} \tag{4}$$

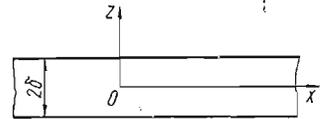


Рис. 1

Для определения динамических температурных напряжений в пластинке воспользуемся уравнением [1]

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial \tau^2} = \alpha_l \rho (1 + \nu) \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}, \tag{5}$$

где c_1 — скорость распространения упругой волны в пластинке; α_l — температурный коэффициент линейного расширения; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность.

Пусть напряжение и его производная по времени в начальный момент времени равны нулю, т. е.

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \tag{6}$$

В случае свободной от внешней нагрузки пластинки

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } z = \pm \delta. \quad (7)$$

Применив к уравнениям (5), (7) преобразование Лапласа по времени при начальных условиях (6), получим

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} - \frac{s}{c_1^2} \bar{\sigma}_{zz} = \alpha_t \rho (1 + \nu) s^2 \bar{T}, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = 0 \quad \text{при } z = \pm \delta. \quad (9)$$

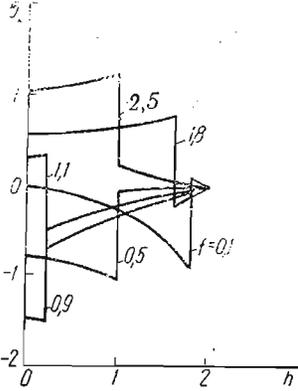


Рис. 2

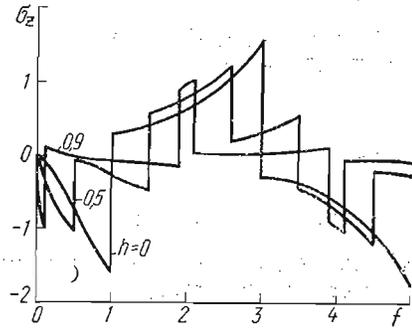


Рис. 3

Решение уравнения (8) при условиях (9) и с учетом соотношения (4) имеет вид

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{\alpha_t E t_0 (1 - \nu)}{(1 - 2\nu) \left(s - \frac{c_1^2}{a} \right)} \left(\frac{\text{ch} \frac{s}{c_1} z}{\text{ch} \frac{s}{c_1} \delta} - \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} z}{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta} \right). \quad (10)$$

Переходя к оригиналу и используя при этом соотношения [2]

$$\frac{1}{\text{ch} z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(1+2n)z}$$

и данные работы [3], получаем следующее выражение динамического температурного напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n & \left\langle \exp [f - P(-h + 2n + 1)] S_- [f - P(-h + 2n + 1)] + \exp [f - P(h + 2n + 1)] S_- [f - P(h + 2n + 1)] - \right. \\ & - \frac{1}{2} \exp (f) \left\{ \exp [P(-h + 2n + 1)] \operatorname{erfc} \left[\frac{P(-h + 2n + 1)}{2\sqrt{f}} + \sqrt{f} \right] + \right. \\ & + \exp [-P(-h + 2n + 1)] \operatorname{erfc} \left[\frac{P(-h + 2n + 1)}{2\sqrt{f}} - \sqrt{f} \right] + \\ & + \exp [P(h + 2n + 1)] \operatorname{erfc} \left[\frac{P(h + 2n + 1)}{2\sqrt{f}} + \sqrt{f} \right] + \\ & \left. \left. + \exp [P(h + 2n + 1)] \operatorname{erfc} \left[\frac{P(h + 2n + 1)}{2\sqrt{f}} - \sqrt{f} \right] \right\} \right\rangle, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\sigma_z = \frac{\sigma_{zz} (1 - 2\nu)}{\alpha_t E t_0 (1 - \nu)}; \quad f = \frac{c_1^2 \tau}{a}; \quad P = \frac{c_1 \delta}{a}; \quad p = \frac{c_1 z}{a}; \quad h = \frac{p}{P}.$$

На рис. 2 приведен график зависимости динамического температурного напряжения σ_z от координаты при фиксированном времени, а на рис. 3 —

от времени при фиксированной координате. Ввиду симметричности задачи относительно срединной поверхности пластинки графики приведены только для полутолщины пластинки при $0 \leq z \leq \delta$. Как видно из графика рис. 2, в произвольную точку h внутри бесконечной пластины при $0 \leq z \leq \delta$ в момент времени $t = P(1 - h)$ приходит фронт упругой волны, возникающей в результате теплового удара по поверхности $z = \delta$, а в момент $t = P(1 + h)$ — фронт упругой волны, возникающей в результате теплового удара по поверхности $z = -\delta$. При $-\delta < z < 0$ в произвольную точку внутри бесконечной пластинки в момент времени $t = P(1 - h)$ приходит фронт упругой волны, возникающей от теплового удара по поверхности $z = -\delta$, а затем в момент $t = (1 + h)P$ — фронт упругой волны, возникающей от теплового удара по поверхности $z = \delta$. В таком же порядке в моменты времени $t = P(2n + 1 \pm h)$ приходит к этой же точке фронт отраженных от соответствующих поверхностей пластинки упругих волн ($n = 1, 2, 3, \dots$). Максимальные по величине напряжения возникают, как видно из графика рис. 3, при $h = 0$, т. е. на срединной поверхности пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963. 251 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высш. школа», 1965. 465 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 25.XII 1975 г.

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, В. И. Громык, Л. Я. Кузьменко

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛП ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Рассмотрим бесконечную стеклянную пластинку толщиной 2δ с круговым коваровым включением такой же толщины и радиуса R (рис. 1). Боковая поверхность $z = -\delta$ пластинки теплоизолирована. Через поверхность $z = \delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой температуры $t_c(\tau)$ по закону Ньютона, причем коэффициент теплоотдачи является функцией времени $\alpha(\tau)$. Температура включения принимается равной температуре среды. Начальная температура системы равна 0. Условие теплоизоляции по поверхности $z = -\delta$ эквивалентно условию симметрии пластинки толщиной $2h$ ($h = \delta$) относительно плоскости $\zeta = 0$, через поверхности $\zeta = \pm h$ которой осуществляется теплообмен с внешней средой температуры t_c по закону Ньютона. Уравнение для определения интегральной характеристики температуры $\vartheta = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t d\zeta$, соответствующее квадратичному закону изменения температуры t по толщине $2h$ пластинки, имеет вид [2]

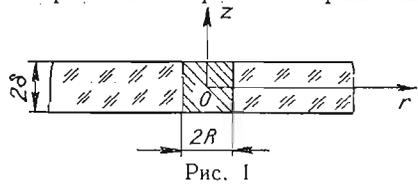


Рис. 1

где

$$\rho^2 \vartheta - \kappa^2(\tau) [\vartheta - t_c(\tau)] = 0, \quad (1)$$

где

$$\rho^2 = \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \kappa^2(\tau) = \frac{3\alpha(\tau)}{[3\lambda + h\alpha(\tau)]h};$$