

8. Mehta V. The distribution of thermal stresses around a crack in a semi-infinite elastic solid of transversely isotropic material.— Arch. mech. slosow., 1966, 18, N 6, p. 749—757.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
12.XI 1975 г.

УДК 539.3 : 539.4.012

М. Г. Кривцун

**ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ  
С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНОЙ**

Рассмотрим упругую изотропную пластину с эллиптическим отверстием и трещиной, расположенной на большой оси эллипса. Примем оси симметрии эллипса за координатные оси комплексного переменного  $z = x + iy$  и предположим, что трещина расположена на отрезке  $[a, b]$  положительной полуоси  $Ox$ . Исследуем предельное равновесие такой пластины, нагруженной внешними усилиями.

При решении задачи воспользуемся методом дисторсии [1], представив напряженное состояние пластины в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{\mu} \quad (i, j = x, y), \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}^0$  — напряжения в пластине с отверстием без трещины, которые будем считать известными, так как при заданных внешних усилиях их можно определить с помощью методов, предложенных в работе [2];  $\sigma_{ij}^{\mu}$  — напряжения, обусловленные заданной на отрезке  $[a, b]$  дисторсией [1] (обозначения общепринятые)

$$\mu(x) = \frac{G}{\pi(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial x} [v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)], \quad (2)$$

компоненты которой определяются из граничного условия

$$\sigma_{jy}^{\mu}(x) + p_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \quad x \in [a, b], \quad (3)$$

где  $p_1(x) = \sigma_{iy}^0(x) - \sigma_{iy}^p(x)$ ,  $\sigma_{1y} \equiv \sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{2y} \equiv \sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{jy}^p(x)$  — внешние усилия, заданные на трещине.

Найдем компоненты напряжений, обусловленных дисторсией (2), заданной в точке  $\tau$  оси  $Ox$ . С этой целью воспользуемся методом комплексных потенциалов Колосова — Мухелишвили в преобразованной области. Рассмотрим функцию

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad (4)$$

осуществляющую конформное отображение области  $|\zeta| \geq 1$  в плоскости комплексного переменного  $\zeta$  на рассматриваемую область, при котором трещина есть образом отрезка  $[\alpha, \beta]$  действительной оси  $O\xi$ . Распространим определение функции  $\omega'(\zeta) \Phi(\zeta)$  на область  $|\zeta| < 1$  следующим образом [2]:

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = -\omega'(\zeta) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2} \left[ \omega(\zeta) \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \bar{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right]. \quad (5)$$

Так как контур отверстия свободен от внешних усилий, то решение задачи имеет вид  $\omega'(\zeta) \Phi(s, \zeta) = F(s, \zeta)$ , где  $\tau = \omega(s)$ ,  $F(s, \zeta)$  — рациональная функция, представляющая собой совокупность всех полюсов функции  $\omega(\zeta) \Phi(s, \zeta)$ . Исходя из соотношений (4), (5) и комплексных потенциалов

$$\Phi_0(\tau, z) = \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}, \quad \Psi_0(\tau, z) = \frac{\bar{\mu}(\tau)}{\tau - z} - \frac{\tau \mu(\tau)}{(\tau - z)^2},$$

обусловленных наличием дисторсии (2) в сплошной пластине [1], нетрудно записать общее выражение функции  $F(s, \zeta)$ , так как можно заранее определить все возможные полюсы функции  $\omega'(\zeta)\Phi(s, \zeta)$  и их максимальные порядки (здесь и далее новых обозначений рассматриваемых функций после замены переменных не вводим):

$$\omega'(\zeta)\Phi(s, \zeta) = \mu(s) \left[ \frac{1}{s-\zeta} + \frac{1}{\zeta(s_\zeta^2-1)} \right] - \overline{\mu(s)} \frac{B(s)}{(s_\zeta^2-1)^2}, \quad (6)$$

где  $B(s) = c \frac{s(s^2-1)}{s^2-m}$ ,  $c = 1-m$ .

Используя соотношение (6), находим

$$\sigma_{yy}^\mu(s, \xi) + i\sigma_{xy}^\mu(s, \xi) = \frac{2}{\omega'(\xi)} \left\{ \overline{\mu(s)} \left[ \frac{1}{s-\xi} + M_1(s, \xi) \right] - \mu(s) M_2(s, \xi) \right\}, \quad (7)$$

$$M_1(s, \xi) = \frac{1}{s\omega} - \frac{B(s)}{2} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{B(\xi)}{\omega^2} \right], \quad \omega = s\xi - 1,$$

$$M_2(s, \xi) = \frac{1}{2} \left\{ -c^2 \frac{2m\xi + s(\xi^2 + m)}{(s^2 - m)(\xi^2 - m)^2} + \frac{B(s)}{\omega^2} - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{B(\xi)}{\xi\omega} \right] \right\}.$$

Напряжения  $\sigma_{ij}^\mu(\xi)$ , вызванные непрерывно распределенной на  $[a, b]$  дисторсией  $\mu(x)$ , определяются по формуле  $\sigma_{ij}^\mu(\xi) = \int_\alpha^\beta \sigma_{ij}^\mu(s, \xi) d\omega(s)$ , из которой с учетом соотношения (7) после замены переменных  $\xi = \gamma + \delta\eta$ ,  $s = \gamma + \delta t$ ,  $\gamma = \frac{\beta + \alpha}{2}$ ,  $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$  найдем

$$\sigma_{ij}^\mu(\eta) = \frac{1}{\pi\omega'(\eta)} \int_{-1}^1 \mu_j(t) \left[ \frac{1}{t-\eta} + K_j(t, \eta) \right] dt, \quad (8)$$

где

$$\mu_1(\eta) - i\mu_2(\eta) = 2\pi\omega'(\eta)\mu(\eta), \quad K_j(t, \eta) = \delta [M_1(t, \eta) + (-1)^j M_2(t, \eta)].$$

Удовлетворяя граничному условию (3), для определения функций  $\mu_j(\eta)$  получаем интегральные уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mu_j(t) \left[ \frac{1}{t-\eta} + K_j(t, \eta) \right] dt + \omega'(\eta) p_j(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (9)$$

Поскольку разрыв перемещений в вершинах трещины равен нулю, то искомые функции должны удовлетворять условию

$$\int_{-1}^1 \mu_j(\eta) d\eta = 0.$$

Решения уравнений (9) выражаются через их фундаментальные решения  $\mu_j(r, \eta)$  так:

$$\mu_j(\eta) = \int_{-1}^1 p_j(r) \mu_j(r, \eta) d\omega(r).$$

Функции  $\mu_j(r, \eta)$  определяются из уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mu_j(r, \eta) \left[ \frac{1}{t-\eta} + K_j(t, \eta) \right] dt + \delta(r-\eta) = 0, \quad r, \eta \in [-1, 1],$$

где  $\delta(\eta)$  — дельта-функция Дирака. Разложим ядра  $K_j(t, \eta)$  в ряд по  $\gamma^{-1}$ . Тогда решения этих уравнений, неограниченные на концах разреза,

запишем в виде [3]

$$\mu_j(r, \eta) = \frac{\mu_j^*(r, \eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad \mu_j^*(r, \eta) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi} \left[ \frac{1}{r-\eta} + \sum_{k=4}^{\infty} \chi_{jk}(r, \eta) \gamma^{-k} \right].$$

Выражения для  $\chi_{jk}$  ( $k = \overline{4, 7}$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_{j4}(r, \eta) &= -c_{j1} \delta^2 \eta, \quad \chi_{j5} = c_{j1} \delta^3 (r\eta + \eta_1), \\ \chi_{j6}(r, \eta) &= -2c_{j2} \delta^2 \eta - c_{j1} \delta^4 [r\eta_1 + \eta (r^2 + 3\eta^2 - 1)], \\ \chi_{j7}(r, \eta) &= 3c_{j2} \delta^3 (\eta_1 + r\eta) + \frac{1}{2} \delta^5 [c_{j3} \eta r (2r^2 + 1) + \\ &+ \frac{1}{2} c_{j4} \eta_1 (2r^2 + 1) + c_{j5} r \eta \eta_1 + c_{j6} \left( \eta^2 \eta_1 - \frac{1}{4} \right)], \end{aligned}$$

где  $\eta_1 = 2\eta - 1$ , а постоянные  $c_{jk}$  определяются формулами

$$c_{11} = 1 - cm, \quad c_{12} = 1 + 2cm (c - m), \quad c_{13} = 1 - \frac{3}{2} cm,$$

$$c_{14} = 2(1 - 2cm), \quad c_{15} = 3 \left( 1 - \frac{5}{2} cm \right), \quad c_{16} = 4(1 - 3cm),$$

$$c_{21} = 1 + c, \quad c_{22} = 1 + c(1 + m^2), \quad c_{23} = 1 + \frac{c}{2}(1 + m),$$

$$c_{24} = 2[1 + c(1 + m)], \quad c_{25} = 3 \left[ 1 + c \left( 1 + \frac{3}{2} m \right) \right], \quad c_{26} = 4[1 + c(1 + 2m)].$$

Формулы для коэффициентов интенсивности напряжений, исходя из их определения [4], в этом случае удобно записать в виде

$$k_j^{\pm} = \lim_{\eta \rightarrow \pm 1} \sqrt{\pi \omega'(\eta) (\eta^2 - 1)} \sigma_{j\eta}(\eta). \quad (10)$$

Из соотношений (1) и (8) определим напряжения  $\sigma_{j\eta}(x)$  на продолжениях трещины. В окрестности ее концов они определяются так:

$$\sigma_{j\eta}(\eta) = \mp \frac{\mu_j^*(\eta)}{\omega'(\eta) \sqrt{\eta^2 - 1}} + 0(1), \quad \mu_j^*(\eta) = \int_{-1}^1 \rho_j(r) \mu_j^*(r, \eta) d\omega(r).$$

Подставляя это выражение в формулу (10), находим фундаментальное выражение для коэффициентов интенсивности напряжений

$$k_j^{\pm} = \int_{-1}^1 \rho_j(r) k_j^{\pm}(r, \eta) d\omega(r), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} k_j^{\pm}(r) &= (\gamma \pm \delta) \sqrt{\frac{1-r^2}{\pi R \delta [(\gamma \pm \delta)^2 - m]}} \left[ \frac{1}{1 \pm r} \mp k_{*j}^{\pm}(r) \right]; \\ k_{*j}^{\pm}(r) &= \lambda^2 \gamma^{-2} \left\{ c_{j1} (\mp 1 + \lambda \mp 2\lambda^2) + c_{j2} \gamma^{-2} (\mp 2 + 3\lambda) + \right. \\ &+ \frac{1}{4} \lambda \left( c_{j4} + \frac{3}{2} c_{j6} \right) + r\lambda \left[ c_{j1} (\pm 1 - \lambda) \pm 3c_{j2} \gamma^{-2} \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (c_{j3} + c_{j5}) \right] + \\ &\left. + r^2 \lambda^2 \left( \mp c_{j1} + \frac{1}{2} c_{j4} \lambda \right) \pm r^3 \lambda^3 c_{j3} \right\}, \quad \lambda = \frac{\delta}{\gamma}. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла в формуле (11) удобно пользоваться квадратурной формулой Гаусса — Чебышева

$$k_j^{\pm} = \frac{\gamma \pm \delta}{N} \sqrt{\frac{\pi R \delta}{(\gamma \pm \delta)^2 - m}} \sum_{k=1}^N A_k^{\pm} \rho_j(\xi_k), \quad (12)$$

где

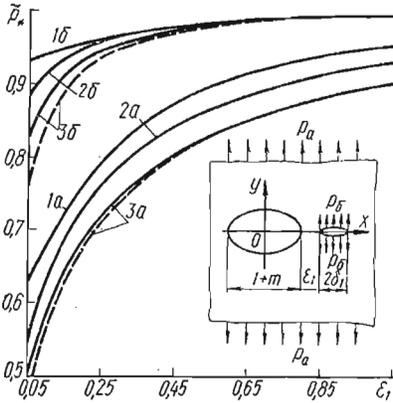
$$A_k^\pm = \left(1 - \frac{m}{\xi_k^2}\right) [1 \pm r_k \mp (1 - r_k^2) k_{\omega_j}^\pm(r_k)]; \quad \xi_k = \gamma + \delta r_k;$$

$$r_k = \cos \frac{2k-1}{2N} \pi.$$

Отметим, что при  $m = 1$  ядра уравнений (9) совпадают, а их решения можно определить в замкнутой форме, так как при переходе к переменным физической плоскости эти уравнения обращаются в характеристические сингулярные уравнения. Опуская промежуточные выкладки, приведем квадратную формулу для коэффициентов интенсивности напряжений

$$k_j^\pm = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{2\pi R \delta_1}{(\gamma_1 \pm \delta_1)^2 - 1}} \sum_{k=1}^N B_k^\pm \rho_j(\tau_{1k}), \quad (13)$$

$$\text{где } B_k^\pm = \left[ 1 \pm r_k \mp \frac{\delta_1}{I} (1 - r_k^2) \sum_{v=1}^N \frac{1}{(r_v - \tau_{1k}) \sqrt{(b_1 - r_v)(a_1 - r_v)}} \right] \times \\ \times \sqrt{\tau_{1k}^2 - 1};$$



$$I = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{(b_1 - r_k)(a_1 - r_k)}};$$

$$\tau_{1k} = \gamma_1 + \delta_1 r_k;$$

$$\gamma_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}; \quad \delta_1 = \frac{b_1 - a_1}{2};$$

$$a = 2Ra_1; \quad b = 2Rb_1.$$

Рассмотрим частные случаи нагружения пластины.

а. Отверстие и трещина свободны от внешних усилий, а на бесконечности в перпендикулярном к трещине направлении действуют монотонно возрастающие растягивающие усилия  $p_a$ . Тогда [2]

$$p_1(\xi) = \sigma_{yy}^0(\xi) = p_a \left\{ 1 + \frac{1+m}{2(\xi^2 - m)} \left[ 1 + m + \frac{c^2}{\xi^2 - m} \left( 3 + \frac{2m}{\xi^2 - m} \right) \right] \right\}.$$

б. Внешние усилия на обводе отверстия и на бесконечности отсутствуют, а берега трещины подвержены равномерному давлению  $p_0$ . В этом случае  $p_1(\xi) = -\sigma_{yy}^p(\xi) = p_0$ .

На рисунке даны зависимости приведенных критических усилий  $\tilde{p}_* = p_*/p_{0*}$  ( $p_{0*}$  — критическое значение усилий  $p$  для пластины с трещиной без отверстия) от безразмерного расстояния левого конца трещины от контура отверстия  $\xi_1 = \gamma_1 - 1 - \delta_1$  при  $\delta_1 = 1$  и  $m = 0; 0,5; 1$  (кривые 1, 2, 3 соответственно). Штриховые линии соответствуют точным значениям  $\tilde{p}_*$  при  $m = 1$ , определенным с помощью формулы (13). Анализ полученных результатов показал, что наличие отверстия приводит к уменьшению предельных усилий  $\tilde{p}_*$  ( $\tilde{p}_* < 1$ ), т. е. снижает прочность тела с трещиной.

Следует отметить, что при прочих равных условиях усилия  $\tilde{p}_*$  с увеличением длины трещины в случае нагружения «а» возрастают, а в случае «б» — уменьшаются. Это связано с тем, что значение коэффициента интенсивности напряжений возрастает пропорционально приложенным к берегам трещины напряжениям, которые в случае «а» уменьшаются, так как по мере возрастания длины трещины она все больше выходит из зоны напряжений, вы-

званных возмущением напряженного состояния около отверстия. Отметим, что  $k_1^- > k_1^+$ , т. е. распространение трещины происходит со стороны отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С. Метод дисторсии в теории термоупругости тел с трещинами.— ФХММ, 1975, № 3, с. 9—20.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966. 707 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958. 543 с.
4. Панасюк Б. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., «Наук. думка», 1968. 246 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 15.XII 1975 г.

УДК 539.377

Ф. В. Семерак, О. И. Борисенко

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ  
ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ**

Рассмотрим изотропную бесконечную пластинку толщины  $2\delta$  (рис. 1), температура поверхностей  $z = \pm\delta$  которой изменяется в начальный момент времени на некоторую величину  $t_0$ , оставаясь в дальнейшем постоянной. Для определения возникающего в пластинке нестационарного температурного поля имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1}$$

и краевые условия

$$T(z, \tau) = t_0 S_+(z) \quad \text{при } z = \pm \delta, \tag{2}$$

$$T(z, \tau) = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \tag{3}$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $\tau$  — время;  $S_+(z)$  — асимметричная единичная функция.

С помощью интегрального преобразования Лапласа по времени  $\tau$ , находим изображение температуры в пластинке

$$\bar{T} = \frac{t_0}{s} \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} z}{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta} \tag{4}$$

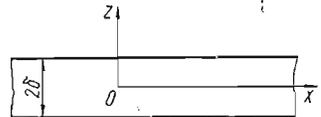


Рис. 1

Для определения динамических температурных напряжений в пластинке воспользуемся уравнением [1]

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial \tau^2} = \alpha_l \rho (1 + \nu) \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}, \tag{5}$$

где  $c_1$  — скорость распространения упругой волны в пластинке;  $\alpha_l$  — температурный коэффициент линейного расширения;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность.

Пусть напряжение и его производная по времени в начальный момент времени равны нулю, т. е.

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \tag{6}$$