$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{2Eh}\left[(1+\nu)(T_\lambda^{(1)}-T_\rho^{(1)})+\rho_0\frac{\partial}{\partial\rho}(T_\lambda^{(1)}-\nu T_\rho^{(1)})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2(1+\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}S_{\rho\lambda}^{(1)}\right]-\frac{\rho_0}{R}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\rho}\right\}=0$$

и для второго

$$T_\lambda^{(2)}-\nu T_\rho^{(2)}=0,\quad \gamma_\rho^{(2)}=\gamma_\lambda^{(2)}=0,\quad N_\rho^{(2)}=\frac{\rho_0}{R}\left[T_\rho^{(2)}+T_\rho^{(1)}\cos N\lambda-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(T_\rho^{(0)}-2ph)\cos 2N\lambda\right],\tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{2Eh}\left[(1+\nu)(T_\lambda^{(2)}-T_\rho^{(2)})+\rho_0\frac{\partial}{\partial\rho}(T_\lambda^{(2)}-\nu T_\rho^{(2)})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2(1+\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}S_{\rho\lambda}^{(2)}\right]-\frac{\rho_0}{R}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\rho}\right\}=0.$$

В качестве примера на контуре квадратного отверстия в оболочке с параметрами (17) подсчитаны величины $k_1=\frac{T_\rho}{2ph}$ и $k_2=\frac{3M_\rho}{2ph^2}$. Зависимости этих величин от угла λ приведены на рис. 2. Из рисунка можно заключить, что влияние сдвигов на величину k_1 не превышает 5%, а на величину k_2 —8%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь О. М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—611.
2. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями. К., «Наук. думка», 1970. 324 с.
3. *Лунь Е. И., Сяський А. А.* К определению упругого состояния в оболочке с отверстием, край которого подкреплен широким упругим кольцом.— В кн.: Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., 1973, с. 186—190.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., «Наук. думка», 1973. 248 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР,
Ровенский педагогический институт

Поступила в редколлегию 16.XI 1974 г.

УДК 539.377

М. К. Сало, О. В. Побережный

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим трансверсально-изотропный слой толщиной $2h$ с круговой трещиной радиуса $r=r_0$. Трещина расположена параллельно и симметрично граням слоя, которые свободны от внешних усилий и поддерживаются при температуре $T_2(r, t)$. На части поверхности трещины $r<a$ задается температура $T_1(r, t)$ или тепловой поток $g(r, t)$. Отнесем это тело к цилиндрической системе координат (r, φ, z) так, чтобы ось z была перпендикулярна к плоскости трещины, а начало системы координат совпадало с центром трещины.

Необходимо определить осесимметричное температурное поле $T(r, z, t)$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности

$$\Lambda^2\frac{\partial^2T}{\partial z^2}+\Delta_rT=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial\tau}\tag{1}$$

и соответствующим граничным условиям в области $0 \leqslant z \leqslant h$:

$$T(r,\ h,\ t) = T_2(r,\ t), \quad r < \infty, \tag{2}$$
$$T(r,\ 0,\ t) = T_1(r,\ t), \quad r < a, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad r > a$$

или

$$T(r,\ h,\ t) = T_2(r,\ t), \quad r < \infty, \tag{3}$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=\pm 0} = \pm g(r,\ t)\,\theta(a-r)$$

при начальном условии $T(r,\ z,\ 0) = 0$. Здесь $\Lambda^2 = \lambda_2/\lambda_1$; $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности вдоль осей r и z соответственно; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; $\theta(r)$ — функция Хевисайда.

Решение уравнения (1), ограниченное на бесконечности, представим в виде

$$\overline{T}(r,\ z,\ p) = \int_0^\infty \xi\left\{A(\xi)\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{\Lambda}\beta\right) + B(\xi)\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{\Lambda}\beta\right)\right\} J_0(\xi r)\,d\xi,\quad \beta = \sqrt{\xi^2 + \frac{p}{\varkappa}}, \tag{4}$$

где p — параметр преобразования; $J_0(r)$ — функция Бесселя, а черточкой обозначено трансформанту Лапласа — Карсона по времени. Неизвестные функции $A(\xi)$ и $B(\xi)$ определяются из условий (2) и (3). С первого граничного условия (2) получаем зависимость

$$A(\xi) = \left[\overline{T}_2^*(\xi,\ p) - B(\xi)\,\mathrm{sh}\left(\frac{h}{\Lambda}\beta\right)\right]\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{h}{\Lambda}\beta\right), \tag{5}$$

а остальные два для определения $B(\xi)$ дают дуальные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty C(\xi)\,\beta^{-1}\,\mathrm{th}\left(\frac{h}{\Lambda}\beta\right) J_0(\xi r)\,d\xi = -\overline{T}_1(r,\ p) +$$
$$+ \int_0^\infty \xi\overline{T}_2^*(\xi p)\,\mathrm{sch}\left(\frac{h}{\Lambda}\beta\right) J_0(\xi r)\,d\xi, \quad 0 < r < a; \tag{6}$$
$$\int_0^\infty C(\xi)\,J_0(\xi r)\,d\xi = 0, \quad r > a; \quad C(\xi) = \xi\beta B(\xi),$$

где звездочкой обозначено трансформанту Ханкеля по координате r.

Точных методов решения таких уравнений нет. Их можно решить приближенно, например методом аппроксимации ядер [3, 4, 6].

В случае граничных условий (3) имеем зависимость (5) и соотношение

$$B(\xi) = \frac{\Lambda}{\beta}\int_0^a r\overline{g}(r,\ p)\,J_0(\xi r)\,dr. \tag{7}$$

Напряженное состояние трансверсально-изотропного слоя, обусловленное температурным полем (4), определяется с помощью функций $\Phi(r,\ z,\ t)$ и $\Psi(r,\ z,\ t)$, удовлетворяющих уравнениям [8]

$$\Delta_r\Phi + m_{22}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - kT\right), \quad \Delta_r\Psi + m_{21}^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \lambda_{11}T, \tag{8}$$

решения которых имеют вид

$$\overline{\Phi}(r,\ z,\ p) = \int_0^\infty \xi\,\{[B_1(\xi)\operatorname{ch} p_2 z + B_2(\xi)\operatorname{sh} p_2 z] + L(\xi)\,[A_1(\xi)\operatorname{ch} p_1 z + A_2(\xi)\operatorname{sh} p_1 z] + M(\xi)\,\overline{T}^*(\xi,\ z,\ p)\}\,J_0(\xi r)\,d\xi, \tag{9}$$

$$\overline{\Psi}(r,\ z,\ p) = \int_0^\infty \xi\,\{[A_1(\xi)\operatorname{ch} p_1 z + A_2(\xi)\operatorname{sh} p_1 z] + N(\xi)\,\overline{T}^*(\xi,\ z,\ p)\}\,J_0(\xi r)\,d\xi,$$

где

$$p_1 = \frac{\xi}{m_{21}};\quad p_2 = \frac{\xi}{m_{22}};\quad L = \frac{1}{\lambda\,(m_{22}^2 - m_{21}^2)};\quad N(\xi) = \frac{\lambda_{11}}{m_{21}^2\beta^2 - \Lambda^2\xi^2};$$

$$M(\xi) = \Lambda^2\,\frac{\lambda_{11}\beta^2 - k\,[m_{21}^2\beta^2 - \Lambda^2\xi^2]}{\lambda\,[m_{21}^2\beta^2 - \Lambda^2\xi^2]\,[m_{22}^2\beta^2 - \Lambda^2\xi^2]}.$$

Здесь и далее все обозначения заимствованы из работы [7].

При нахождении напряженного состояния слоя без трещины, обусловленного температурным полем (4), функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$, $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ находим исходя из симметрии относительно плоскости $z = 0$, в частности,

$$\overline{\sigma}_{zz}^{(0)}(r,\ 0,\ p) = -\int_0^\infty \xi^3\beta\,\{M(\xi)\,S(\xi,\ h) - L(\xi)\,N(\xi)\,D(\xi,\ h)\}\,J_0(\xi r)\,d\xi,$$

$$\begin{aligned} S(\xi,\ h) = Q^{-1}(\xi,\ h)\Big\{\Big[\Lambda^{-1}p_2^{-1}(p_2\operatorname{ch} p_2 h\operatorname{ch} p_1 h - p_1\operatorname{sh} p_1 h\operatorname{sh} p_2 h) - \Lambda^{-1}\Big] \times \\ \times B(\xi) + \beta^{-1}(p_1\operatorname{sh} p_1 h - p_2\operatorname{sh} p_2 h)\Big[A(\xi)\operatorname{ch}\Big(\frac{h}{\Lambda}\beta\Big) + B(\xi)\operatorname{sh}\Big(\frac{h}{\Lambda}\beta\Big)\Big] + \\ + \Lambda^{-1}(\operatorname{ch} p_2 h - \operatorname{ch} p_1 h)\Big[A(\xi)\operatorname{sh}\Big(\frac{h}{\Lambda}\beta\Big) + B(\xi)\operatorname{ch}\Big(\frac{h}{\Lambda}\beta\Big)\Big] + Q(\xi,\ h)\,\beta^{-1}A(\xi)\Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$D(\xi,\ h) = Q^{-1}(\xi,\ h)\,[\Lambda^{-1}p_1^{-1}p_2^{-1}(2p_1p_2\operatorname{ch} p_1 h\operatorname{ch} p_2 h - (p_1^2 + p_2^2)\operatorname{sh} p_1 h\operatorname{sh} p_2 h) - 2\Lambda^{-1}]\,B(\xi),$$

$$Q(\xi,\ h) = p_2\operatorname{sh} p_2 h\operatorname{ch} p_1 h - p_1\operatorname{ch} p_2 h\operatorname{sh} p_1 h.$$

Напряженное состояние слоя с трещиной определяется как сумма состояний $\sigma_{ij}^{(0)}$ и $\sigma_{ij}^{(1)}$, причем $\sigma_{ij}^{(1)}$ выбирается таким образом, чтобы в плоскости $z = 0$ выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(1)} = 0,\quad z = h;\quad \sigma_{rz}^{(1)} = 0,\quad z = 0,\quad 0 < r < \infty; \\ &\sigma_{zz}^{(1)} = -\sigma_{zz}^{(0)},\quad r < r_0;\quad w^{(1)} = 0,\quad r > r_0,\quad z = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Для отыскания напряженного состояния $\sigma_{ij}^{(1)}$ воспользуемся функциями Φ и Ψ, предварительно положив в них $A = B = 0$, и выражениями для напряжений через эти функции [8]. Тогда из первых трех условий (11) находим зависимость между B_1, B_2, A_2 и A_1, а остальные два, представленные в трансформантах Лапласа — Карсона, для определения A_1 дают дуальные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \eta^3 C_1(\eta)\,J_0(\eta\rho)\,d\eta = \frac{m_{21}}{m_{22} - m_{21}}\,f(\rho,\ p),\quad \rho < 1, \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \eta^2 C_1(\eta)\,J_0(\eta\rho)\,d\eta = 0,\quad \rho > 1,$$

где

$$\rho = r/r_0; \quad \eta = \xi r_0; \quad f(\rho,\ p) = L^{-1} r_0^4 \bar{\sigma}_{zz}^{(0)}(\rho,\ 0,\ p) -$$

$$- \int_0^\infty \eta C_1(\eta)\,[K(\eta) - m_{21}^{-1}(m_{22} - m_{21})]\, J_0(\eta\rho)\, d\eta,$$

$$K(\eta) = p_2^{-1} Q^{-1}(\eta,\ \delta)\,[(p_1^2 + p_2^2)\,\mathrm{sh}\, p_1\delta\, \mathrm{sh}\, p_2\delta - 2p_1p_2\,\mathrm{ch}\, p_1\delta\,\mathrm{ch}\, p_2\delta + 2p_1p_2],$$

$$C_1(\eta) = [p_1 - p_1\,\mathrm{ch}\, p_1\delta\,\mathrm{ch}\, p_2\delta + p_2\,\mathrm{sh}\, p_1\delta\,\mathrm{sh}\, p_2\delta]\, Q^{-1}(\eta,\delta)\, A_1(\eta),\ \delta = h/r_0.$$

Учитывая, что

$$\eta C_1(\eta) = -\frac{m_{21} r_0^3}{s_{12} - s_{11}} \int_0^1 \rho \bar{w}(\rho,\ 0,\ p)\, J_0(\eta\rho)\, d\rho, \tag{13}$$

убеждаемся, что второе уравнение (12) удовлетворяется тождественно, а с первого для определения $\bar{w}(\rho,\ 0,\ p)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_0^1 \zeta \bar{w}(\zeta,\ 0,\ p)\, d\zeta \int_0^\infty \eta^2 K(\eta)\, J_0(\eta\rho)\, J_0(\eta\zeta)\, d\eta =$$

$$= (s_{11} - s_{12})\, L^{-1} m_{21}^{-1} \bar{\sigma}_{zz}^{(0)}(\rho,\ 0,\ p), \tag{14}$$

решение которого ищем аналогично работам [1, 5].

По известным A_1, A_2, B_1, B_2 находим функции Φ и Ψ и затем напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$. В частности, при $z = 0$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}(\rho,\ 0,\ p) = \frac{2}{\pi} \frac{\bar{\Phi}_1(1,\ p)}{\sqrt{\rho^2 - 1}} + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\Phi}_1(\xi,\ p) + \xi \bar{\Phi}_1'(\xi,\ p)}{\sqrt{1 - \xi^2}}\, d\xi, \quad \rho > 1, \tag{15}$$

где

$$\bar{\Phi}_1(\xi,\ p) = \int_0^1 \frac{\zeta f(\xi,\ \zeta,\ p)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\, d\zeta$$

При изучении предельно-равновесного состояния тела с трещинами необходимо знать характер напряженного состояния в окрестности трещин, в частности коэффициенты интенсивности напряжений [2]. В рассматриваемой задаче они будут такими:

$$k_1(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{r_0}\, \Phi_1(1,\ t), \qquad k_2 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кит Г. С., Лысый И. П.* Плоская и осесимметричная задача термоупругости для слоя с трещиной.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 155—160.
2. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., «Наук. думка», 1968. 246 с.
3. *Пальцун Н. В.* Осесимметричная температурная задача для слоя с дискообразной трещиной.— В кн.: Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. Вычислительные методы в алгебре, прикладной математике, в системах обработки данных и АСУ». К., 1974, с. 496—502.
4. *Партон В. З.* Осесимметричная температурная задача для пространства с дискообразной трещиной.— ПММ, 1972, 36, № 1, с. 117—124.
5. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое.— МТТ, 1968, № 2, с. 115—122.
6. *Koiter W. T.* Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. P. 1—3. Koninkl. Ned.— Akad. Wetenschep. Proc., 1954, 57, p. 558—579.
7. *Singh A.* Axisymmetrical thearmal stresses in transversely isotropic bodies.— Arch. mech. slosow., 1960, 12, N 3, p. 489—496.

8. *Mehta V.* The distribution of thermal stresses around a crack in a semi-infinite elastic solid of transversely isotropic material.— Arch. mech. slosow., 1966, 18, N 6, p. 749—757.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.XI 1975 г.

УДК 539.3 : 539.4.012

М. Г. Кривцун

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим упругую изотропную пластину с эллиптическим отверстием и трещиной, расположенной на большой оси эллипса. Примем оси симметрии эллипса за координатные оси комплексного переменного $z = x + iy$ и предположим, что трещина расположена на отрезке $[a, b]$ положительной полуоси Ox. Исследуем предельное равновесие такой пластины, нагруженной внешними усилиями.

При решении задачи воспользуемся методом дисторсии [1], представив напряженное состояние пластины в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij}^{\mu} \qquad (i,\ j = x,\ y), \tag{1}$$

где σ_{ij}^{0} — напряжения в пластине с отверстием без трещины, которые будем считать известными, так как при заданных внешних усилиях их можно определить с помощью методов, предложенных в работе [2]; σ_{ij}^{μ} — напряжения, обусловленные заданной на отрезке $[a, b]$ дисторсией [1] (обозначения общепринятые)

$$\mu(x) = \frac{G}{\pi(1+\varkappa)} \frac{\partial}{\partial x} [v^{+} - v^{-} - i(u^{+} - u^{-})], \tag{2}$$

компоненты которой определяются из граничного условия

$$\sigma_{jy}^{\mu}(x) + p_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \quad x \in [a, b], \tag{3}$$

где $p_j(x) = \sigma_{jy}^{0}(x) - \sigma_{jy}^{p}(x)$, $\sigma_{1y} \equiv \sigma_{yy}$, $\sigma_{2y} \equiv \sigma_{xy}$, $\sigma_{jy}^{p}(x)$ — внешние усилия, заданные на трещине.

Найдем компоненты напряжений, обусловленных дисторсией (2), заданной в точке τ оси Ox. С этой целью воспользуемся методом комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили в преобразованной области. Рассмотрим функцию

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \tag{4}$$

осуществляющую конформное отображение области $|\zeta| \geqslant 1$ в плоскости комплексного переменного ζ на рассматриваемую область, при котором трещина есть образом отрезка $[\alpha, \beta]$ действительной оси $O\xi$. Распространим определение функции $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta| < 1$ следующим образом [2]:

$$\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) = -\omega'(\zeta)\,\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\left[\omega(\zeta)\,\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]. \tag{5}$$

Так как контур отверстия свободен от внешних усилий, то решение задачи имеет вид $\omega'(\zeta)\,\Phi(s, \zeta) = F(s, \zeta)$, где $\tau = \omega(s)$, $F(s, \zeta)$ — рациональная функция, представляющая собой совокупность всех полюсов функции $\omega(\zeta)\,\Phi(s, \zeta)$. Исходя из соотношений (4), (5) и комплексных потенциалов

$$\Phi_0(\tau, z) = \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}, \quad \Psi_0(\tau, z) = \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\tau - z} - \frac{\tau\mu(\tau)}{(\tau - z)^2},$$