

Величина  $\lambda_z/\lambda_z^1$  может изменяться от нуля до бесконечности, поэтому  $0 \leq \leq \rho \leq 1/2$ . При  $\rho = 0$  и  $\rho = 1/2$  получаем граничные случаи задачи.

Исследования показали, что бесконечные системы уравнений относительно постоянных  $C_k^{(i)}$  квазирегулярны, и с учетом этого их решение найдено методом редукции из урезанных систем, а по известным  $C_k^{(i)}$  проведены численные расчеты температурных полей и градиентов. На рис. 1 приведено распределение температурного поля и градиента в масштабе  $\alpha_1 = T/T_0$  и  $\alpha_2 = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{R}{T_0}$  в зоне контакта ( $\zeta = 0$ ) при некоторых значениях отношения коэффициентов теплопроводности  $\lambda = \lambda_z/\lambda_z^1$ . Распределение тех же величин по высоте цилиндра изображено соответственно на рис. 2 и 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кизыма Я. М. Осесимметричная задача о давлении упругого цилиндра на упругое полупространство.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4, с. 75—84.
2. Кизыма Я. М. Контактные задачи и их инженерные приложения. М., Изд. НИИМАШ, 1969, с. 21—31.
3. Кизыма Я. М. Осесимметрична контактна задача для циліндра і півпростору у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 2, с. 131—134.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 304 с.
5. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 542 с.

Тернопольский финансово-экономический институт

Поступила в редколлегию  
19.1 1975 г.

УДК 539.3

Б. Л. Пелех, А. А. Сяський, В. А. Сяський

#### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Задачи о концентрации напряжений около криволинейных отверстий в сферических оболочках с использованием классической теории достаточно полно освещены в работах [1, 2]. Исходя из уравнений обобщенной теории оболочек, учитывающей деформации поперечного сдвига (теории типа Тимошенко), исследуем распределение напряжений около криволинейного отверстия в трансверсально-изотропной сферической оболочке.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку радиуса  $R$ , толщины  $2h$ , ослабленную криволинейным отверстием, которая находится под равномерным внутренним давлением интенсивности  $p_0$ . Основное напряженное состояние оболочки считается безмоментным и равно

$$T_\rho^c = T_\lambda^0 = 2\rho h, \quad (1)$$

где  $\rho = \frac{p_0 R}{4h}$ .

Дополнительное напряженное состояние, вызванное наличием отверстия, будем определять исходя из уравнений уточненной теории оболочек [4]:

$$(\Delta\Delta - i\kappa^2\Delta)\Phi = 0, \quad (\Delta - k^2)\psi = 0, \quad (2)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}; \quad k^2 = \frac{2}{(1-\nu)\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{G_n};$$

$G_n$  — модуль сдвига;  $k'$  — коэффициент сдвига;  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Используя метод возмущения формы границы [1], представим компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки в виде рядов

по степеням малого параметра  $\eta$ , который характеризует криволинейность отверстия, в ортогональной системе координат  $(\rho, \lambda)$ , а функции  $\Phi$  и  $\psi$  по аналогичным степеням в полярной системе координат  $(r, \theta)$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j \Phi_j(r, \theta), \quad (3)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j \psi_j(r, \theta),$$

$$T_\rho = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j T_\rho^{(j)}, \dots, H_{\rho\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j H_{\rho\lambda}^{(j)}, \quad (4)$$

$$u_\rho = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j u_\rho^{(j)}, \dots, \gamma_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j \gamma_\lambda^{(j)}.$$

Тогда для  $j$ -го приближения система (2) принимает вид

$$(\Delta\Delta - i\kappa^2\Delta)\Phi_j = 0, \quad (\Delta - k^2)\psi_j = 0, \quad (5)$$

а компоненты напряженно-деформированного состояния определяются по формулам

$$\begin{aligned} T_\rho^{(j)} &= T_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} T_r^{(m)} + L_2^{(j-m)} (T_\theta^{(m)} - T_r^{(m)}) + L_3^{(j-m)} S_{r\theta}^{(m)}], \\ &\dots \dots \dots \\ H_{\rho\lambda}^{(j)} &= H_{r\theta}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[ (L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) H_{r\theta}^{(m)} + \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} (M_\theta^{(m)} - M_r^{(m)}) \right], \\ u_\rho^{(j)} &= u_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} u_r^{(m)} + L_6^{(j-m)} u_\theta^{(m)}], \\ &\dots \dots \dots \\ \gamma_\lambda^{(j)} &= \gamma_\theta^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} \gamma_\theta^{(m)} - L_6^{(j-m)} \gamma_r^{(m)}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференциальные операторы  $L_k^{(j-m)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), порядок которых указан верхним индексом, такие, как в работе [2], а величины  $T_r, \dots, H_{r\theta}, u_r, \dots, \gamma_\theta$  определяются по известным формулам теории оболочек типа Тимошенко [4].

Решение системы (5) с учетом нулевого, первого и второго приближений имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= iB_0^{(0)} \ln r + (C_0^{(0)} + iD_0^{(0)}) H_0^{(1)} (r\kappa \sqrt{-i}) + \eta [(A_N^{(1)} + iB_N^{(1)}) r^{-N} + \\ &+ (C_N^{(1)} + iD_N^{(1)}) H_N^{(1)} (r\kappa \sqrt{-i})] \cos N\theta + \eta^2 \{ [iB_0^{(2)} \ln r + (C_0^{(2)} + iD_0^{(2)}) \times \\ &\times H_0^{(1)} (r\kappa \sqrt{-i})] + [(A_{2N}^{(2)} + iB_{2N}^{(2)}) r^{-2N} + (C_{2N}^{(2)} + iD_{2N}^{(2)}) H_{2N}^{(1)} (r\kappa \sqrt{-i})] \times \\ &\times \cos 2N\theta \}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\psi(r, \theta) = \eta E_N^{(1)} K_N(rk) \sin N\theta + \eta^2 E_{2N}^{(2)} K_{2N}(rk) \sin 2N\theta.$$

Выбирая некоторым образом  $\eta$  и  $N$ , получаем решение для эллиптического ( $\eta = \frac{a-b}{a+b}$ ,  $N = 2$ ), квадратного ( $\eta = \pm \frac{1}{9}$ ,  $N = 4$ ) и треугольного ( $\eta = \frac{1}{4}$ ,  $N = 3$ ) отверстий. Здесь  $a$  и  $b$  — полудиагонали эллипса. Произвольные постоянные, которые входят в (7), определим, удовлетворяя граничным условиям на контуре отверстия.

**Сферическая оболочка с неподкрепленным криволинейным отверстием.** Предположим, что отверстие закрыто крышкой криволинейного очертания, которая передает на контур лишь действие перерезывающей силы.

Закон распределения перерезывающей силы по контуру отверстия зависит от его формы. Граничные условия на контуре отверстия при  $\rho = \rho_0$  имеют вид

$$T_\rho = 0, \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad M_\rho = 0, \quad H_{\rho\lambda} = 0, \quad N_\rho = f_1(\lambda, \eta). \quad (8)$$

Здесь  $\rho_0$  — приведенный размер отверстия, который равен расстоянию от точки контура до оси симметрии вдоль касательной к меридиану оболочки в контурной точке;  $f_1(\lambda, \eta)$  — функция распределения перерезывающей силы по контуру отверстия. Она определяется из условия равновесия крышки

$$\int_L [N_\rho \cos \varphi + T_\rho \sin \varphi] dL = -\rho_0 S, \quad (9)$$

где  $L$  — длина контура отверстия;  $S$  — площадь отверстия;  $\varphi$  — угол между нормалью к срединной поверхности в центре отверстия и нормалью в контурных точках.

Используя выражения для  $dL$ ,  $S$  [2] и разложения для  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  и  $\operatorname{tg} \varphi$  по степеням  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_0}{R} \right)^2 - \eta \left( \frac{\rho_0}{R} \right)^2 \cos N\lambda - \frac{1}{2} \eta^2 \left( \frac{\rho_0}{R} \right)^2 + \dots \right], \\ \sin \varphi &= \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{\rho_0}{R} \left[ 1 + \eta \cos N\lambda - \frac{\eta^2}{2} \left( \cos 2N\lambda - \frac{1}{2} \right) + \dots \right], \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{r}{R} = \frac{\rho_0}{R} \left[ 1 + \eta \cos N\lambda - \frac{\eta^2}{2} \cos 2N\lambda + \dots \right], \end{aligned} \quad (10)$$

условие (9) приводим к виду

$$\int_L [N_\rho \cos \varphi - (T_\rho - 2ph) \sin \varphi] dL = 0 \quad (11)$$

или

$$N_\rho = (T_\rho - 2ph) \operatorname{tg} \varphi. \quad (12)$$

Тогда граничные условия (8) при  $\rho = \rho_0$  принимают вид

$$\begin{aligned} T_\rho = 0, \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad M_\rho = 0, \quad H_{\rho\lambda} = 0, \quad N_\rho = -\frac{\rho_0 \rho_0}{2} \times \\ \times \left[ 1 + \eta \cos N\lambda - \frac{\eta^2}{2} \cos 2N\lambda \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Раскладывая левые части выражений (13) в ряды по степеням  $\eta$ , получаем граничные условия для  $j$ -го приближения. При  $\rho = \rho_0$  для нулевого приближения

$$T_\rho^{(0)} = 0, \quad M_\rho^{(0)} = 0, \quad N_\rho^{(0)} = -\frac{\rho_0 \rho_0}{2}, \quad (14)$$

для первого

$$T_\rho^{(1)} = S_{\rho\lambda}^{(1)} = M_\rho^{(1)} = H_{\rho\lambda}^{(1)} = 0, \quad N_\rho^{(1)} = -\frac{\rho_0 \rho_0}{2} \cos N\lambda \quad (15)$$

и для второго

$$T_\rho^{(2)} = S_{\rho\lambda}^{(2)} = M_\rho^{(2)} = H_{\rho\lambda}^{(2)} = 0, \quad N_\rho^{(2)} = \frac{\rho_0 \rho_0}{4} \cos 2N\lambda. \quad (16)$$

В качестве примера подсчитаны коэффициенты концентрации усилий  $k_1 = \frac{T_\lambda}{2ph}$  и максимальных по толщине оболочки изгибных моментов  $k_2 = \frac{3M_\lambda}{2ph^2}$  на контуре квадратного отверстия в оболочке с такими физико-геометрическими характеристиками:

$$\frac{E}{G_n} = 2(1 + \nu); \quad 20; \quad 40; \quad R = 1,0 \text{ м}; \quad \rho_0 = 0,1 \text{ м}; \quad \nu = 0,3; \quad 2h = 0,02 \text{ м}. \quad (17)$$

Зависимости этих величин от угла  $\lambda$  приведены на рис. 1. Из рисунка видно, что деформации поперечного сдвига увеличивают максимальное значение  $k_1$  на 5,5% при  $\frac{E}{G_n} = 20$  и на 14% при  $\frac{E}{G_n} = 40$ . Для величины  $k_2$  эти увеличения соответственно равны 21,8 и 43,5%.

**Абсолютно жесткое включение.** Предположим, что отверстие в оболочке подкреплено абсолютно жесткой шайбой. Под действием равномерного давления крышка получает фиксированное вертикальное перемещение

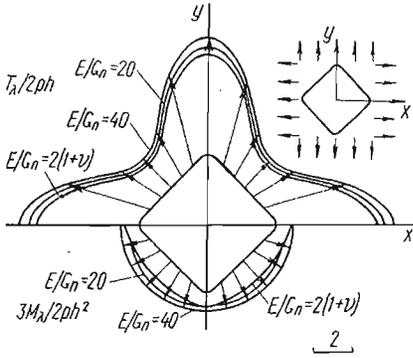


Рис. 1

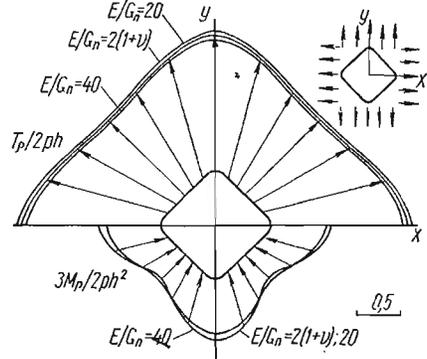


Рис. 2

$w_0$ . Углы поворота контура отверстия равны нулю. Граничные условия на контуре отверстия можно задать в виде [3]

$$T_\lambda - \nu T_\rho = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{2Eh} \left[ (1 + \nu)(T_\lambda - T_\rho) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho} (T_\lambda - \nu T_\rho) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2(1 + \nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{\rho\lambda} \right] - \frac{\rho_0}{R} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right\} = 0,$$

$$\gamma_\rho = \gamma_\lambda = 0, \quad w = f_2(\lambda, \eta), \quad (18)$$

где  $f_2(\lambda, \eta)$  — закон распределения прогиба по контуру отверстия, который можно задать в виде

$$w = w_0 \cos \varphi. \quad (19)$$

Здесь  $\cos \varphi$  имеет вид (10).

Рассмотрим эту задачу при несколько иных, чем (18), граничных условиях. Вместо условия (19) будем рассматривать условие равновесия крышки (12). Оно дает закон распределения перерезывающей силы по контуру отверстия. Выполнение условия (19) будет обеспечивать первое условие (18) (условие нерастяжимости контура отверстия). В данном случае граничные условия при  $\rho = \rho_0$  принимают вид

$$T_\lambda - \nu T_\rho = 0, \quad \gamma_\rho = \gamma_\lambda = 0, \quad N_\rho - (T_\rho - 2\rho h) \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{2Eh} \left[ (1 + \nu)(T_\lambda - T_\rho) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho} (T_\lambda - \nu T_\rho) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2(1 + \nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{\rho\lambda} \right] - \frac{\rho_0}{R} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right\} = 0. \quad (20)$$

Раскладывая левые части условий (20) в ряды по степеням  $\eta$ , получаем граничные условия для  $j$ -го приближения. При  $\rho = \rho_0$  для нулевого приближения

$$T_\lambda^{(0)} - \nu T_\rho^{(0)} = 0, \quad \gamma_\rho^{(0)} = 0, \quad N_\rho^{(0)} = \frac{\rho_0}{R} (T_\rho^{(0)} - 2\rho h), \quad (21)$$

для первого

$$T_\lambda^{(1)} - \nu T_\rho^{(1)} = 0, \quad \gamma_\rho^{(1)} = \gamma_\lambda^{(1)} = 0, \quad N_\rho^{(1)} = \frac{\rho_0}{R} [T_\rho^{(1)} + (T_\rho^{(0)} - 2\rho h) \cos N\lambda], \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{2Eh} \left[ (1 + \nu)(T_\lambda^{(1)} - T_\rho^{(1)}) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho} (T_\lambda^{(1)} - \nu T_\rho^{(1)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1 + \nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{\rho\lambda}^{(1)} \right] - \frac{\rho_0}{R} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \rho} \right\} = 0$$

и для второго

$$T_\lambda^{(2)} - \nu T_\rho^{(2)} = 0, \quad \gamma_\rho^{(2)} = \gamma_\lambda^{(2)} = 0, \quad N_\rho^{(2)} = \frac{\rho_0}{R} \left[ T_\rho^{(2)} + T_\rho^{(1)} \cos N\lambda - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (T_\rho^{(0)} - 2\rho h) \cos 2N\lambda \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{2Eh} \left[ (1 + \nu)(T_\lambda^{(2)} - T_\rho^{(2)}) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho} (T_\lambda^{(2)} - \nu T_\rho^{(2)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1 + \nu) \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{\rho\lambda}^{(2)} \right] - \frac{\rho_0}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \rho} \right\} = 0.$$

В качестве примера на контуре квадратного отверстия в оболочке с параметрами (17) подсчитаны величины  $k_1 = \frac{T_\rho}{2\rho h}$  и  $k_2 = \frac{3M_\rho}{2\rho h^2}$ . Зависимости этих величин от угла  $\lambda$  приведены на рис. 2. Из рисунка можно заключить, что влияние сдвигов на величину  $k_1$  не превышает 5%, а на величину  $k_2$  — 8%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь О. М. Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках. — Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—611.
2. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. К., «Наук. думка», 1970. 324 с.
3. Лунь Е. И., Сяський А. А. К определению упругого состояния в оболочке с отверстием, край которого подкреплен широким упругим кольцом. — В кн.: Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., 1973, с. 186—190.
4. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., «Наук. думка», 1973. 248 с.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР,  
Ровенский педагогический институт

Поступила в редколлегию  
16.XI 1974 г.

УДК 539.377

М. К. Сало, О. В. Побережный

#### ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим трансверсально-изотропный слой толщиной  $2h$  с круговой трещиной радиуса  $r = r_0$ . Трещина расположена параллельно и симметрично граням слоя, которые свободны от внешних усилий и поддерживаются при температуре  $T_2(r, t)$ . На части поверхности трещины  $r < a$  задается температура  $T_1(r, t)$  или тепловой поток  $g(r, t)$ . Отнесем это тело к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  так, чтобы ось  $z$  была перпендикулярна к плоскости трещины, а начало системы координат совпадало с центром трещины.

Необходимо определить осесимметричное температурное поле  $T(r, z, t)$ , удовлетворяющее уравнению теплопроводности

$$\Delta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Delta_r T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$