сил на напряженное состояние электропроводного тела с краевой дислокацией Вольтерра пренебрежимо мало.

Наличие дислокаций в металле увеличивает электрическое сопротивление. При равномерном распределении дислокаций, линии которых параллельны оси $z$, а вектор Бюргерса направленный по оси $x$, главные компоненты тензора сопротивления $\hat{R}$, созданного дислокациями, определяются формулами [3, 6]

$$R_{xx} = \frac{9}{32}\frac{\pi^2 m_0^2 N}{\hbar^3 q_0^2 k_f^6}\int\limits_0^{2k_f} k^2 |f(k)|^2 dk, \quad R_{yy} = 3R_{xx}, \quad R_{zz} = 0, \tag{14}$$

где $f(k)\sin\theta$ — преобразование Фурье от функции $\frac{2}{3}\left(e - \frac{\omega}{q_0 n_0}\right)\zeta_0$; $m_0$ — эффективная масса электрона; $q_0$ — заряд электрона; $k_f$ — волновой вектор электрона на поверхности Ферми; $\hbar$ — постоянная Планка; $n_0$, $\zeta_0$ — соответственно плотность электронов проводимости и энергия Ферми в электропроводном теле без дислокаций; $N$ — количество дислокационных линий, пересекающих перпендикулярную им единичную площадку.

В предположении, что дислокации не взаимодействуют между собой, используя выражения (1), (10), (11), из формул (14) находим

$$R_{xx} = \frac{9}{4}\frac{\pi^2\hbar}{q_0^2 k_f}\left(\frac{b_0 G}{3K + 4G}\right)^2\left[\left(1 - \frac{\beta K}{n_0 q_0}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta K}{n_0 q_0}\frac{\varepsilon_c}{k_f}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\beta K}{n_0 q_0}\right)\operatorname{arctg}\frac{2k_f}{\varepsilon_c} + \left(\frac{\beta K}{n_0 q_0}\right)^2 \frac{1}{2\left(1 + \left(\frac{2k_f}{\varepsilon_c}\right)^2\right)}\right]. \tag{15}$$

Для меди $\left(k_f = 1{,}53 \cdot 10^{10}\,\frac{1}{\text{м}},\ n_0 = 10^{28}\,\frac{1}{\text{м}^3}\right)$ при $N = 10^{15}\,\frac{1}{\text{м}^2}$ $R_{xx} \approx$ $\approx 3 \cdot 10^{-12}$ Ом · м, что согласуется с результатом, приведенным в работе [3]. При этом учет влияния объемного заряда на изменение электрического сопротивления составляет около процента.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Влияние деформации на перераспределение свободного электричества в тонких оболочках.— ФХММ, 1972, № 2, с. 57—62.
2. *Гнидец Б. М.* Определение равновесного состояния деформируемого электропроводного твердого раствора.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 3, с. 76—82.
3. *Займан Дж.* Электроны и фононы. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 488 с.
4. *Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.* Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з врахуванням електромагнітних процесів.— Вісн. АН УРСР, 1970, № 12, с. 18—26.
5. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
6. *Pfleiderer H.* Lineare Elastizitätstheorie und Thomas — Fermi-Modell bei Eigenspannungen in Metallen.— Phys. Stat. Sol., 1962, N 2, S. 1524—1538.



Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР



Поступила в редколлегию 15.VII 1975 г.



УДК 539.377



*Я. М. Кизыма, Б. С. Окрепкий*


## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ЦИЛИНДРА

В работах [1—3] решена осесимметричная задача теории упругости о давлении упругого цилиндра на полупространство в случае изотропных и трансверсально-изотропных материалов. Предложенный способ решения можно обобщить на температурные и термоупругие задачи для системы тел цилиндр — полупространство. Рассмотрим применение данного способа для некоторых частных случаев задания условий теплообмена, представляющих теоретический и практический интерес.

Пусть цилиндр и полупространство, изготовленные из разных изотропных материалов, находятся в тепловом контакте по одному из оснований цилиндра. Предположим, что к свободному торцу цилиндра приложена постоянная температура $T_0$, и рассмотрим следующие виды граничных температурных условий на боковой поверхности цилиндра и полупространства; 1) боковая поверхность цилиндра теплоизолирована, а поверхность полупространства поддерживается при нулевой температуре; 2) боковая поверхность цилиндра и поверхность полупространства теплоизолированы; 3) боковая поверхность цилиндра и поверхность полупространства поддерживаются при постоянной нулевой температуре.

Отнесем рассматриваемую систему тел к цилиндрической системе координат, плоскость $z = 0$ которой совпадает с поверхностью полупространства, а ось $Oz$ направлена по оси симметрии цилиндра. Все величины, относящиеся к полупространству, будем обозначать верхним индексом «1», а аналогичные величины для цилиндра оставлять без индексов. Такая постановка задачи приводит к следующим условиям теплообмена. В первом случае при $z = 0$

$$T = T^1, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} \quad (0 \leqslant r \leqslant R), \tag{1}$$

$$T^1 = 0 \quad (R \leqslant r \leqslant \infty), \tag{2}$$

при $z = L$

$$T = T_0 \quad (0 \leqslant r \leqslant R), \tag{3}$$

при $r = R$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant L). \tag{4}$$

Во втором случае условия (1), (3), (4) остаются без изменения, а вместо выражения (2) получаем

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (R \leqslant r \leqslant \infty). \tag{5}$$

В третьем случае условия (1) — (3) остаются без изменения, а вместо формулы (4) получаем

$$T = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant L). \tag{6}$$

Здесь $\lambda_z$, $\lambda_z^1$ — коэффициенты теплопроводности в направлении оси $Oz$.

Как известно [4], в осесимметричном случае изотропного тела термоупругий потенциал $\varphi$ и температурное поле $T$ определяются из уравнений

$$\nabla^2\varphi = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha_T T, \quad \nabla^2 T = 0, \tag{7}$$

а температурные напряжения и смещения выражаются через $\varphi$ по формулам

$$\begin{gathered} u_z^{(T)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z^{(T)} = -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right), \\ \tau_{rz}^{(T)} = 2\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial z}, \quad \sigma_r^{(T)} = -2\mu\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

где $\alpha_T$ — коэффициент линейного температурного расширения; $\mu$, $\sigma$ — —соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Для определения температурного поля в полупространстве вводим трансформанту Ханкеля функции $T(r, z)$ нулевого порядка:

$$\overline{T^1}(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r, z) J_0(\xi, r)\, dr, \tag{9}$$

с помощью которой согласно второму уравнению (7) и с учетом ограниченности при $z \to -\infty$ находим выражение для функции $T^1$ через одну произвольную функцию $F_1(\eta)$:

$$T^1(r,\ z) = \int_0^\infty F_1(\eta)\, J_0(\eta\rho)\, e^{\eta\zeta} d\eta, \tag{10}$$

где $\rho = r/R$, $\zeta = z/R$ — безразмерные параметры; $J_0(\eta\rho)$ — функция Бесселя первого рода действительного аргумента.

Температурное поле в цилиндре находим методом Фурье с добавлением некоторого элементарного решения. Окончательно общее решение имеет вид

$$T(r,\ z) = A_0 z + B_0 + D_0(r^2 - 2z^2) +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty J_0(\lambda_k\rho)\,[A_k \operatorname{sh}\lambda_k z + B_k \operatorname{ch}\lambda_k z] + \sum_{k=1}^\infty I_0(\gamma_k r)\,(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z), \tag{11}$$

где $A_k$, $B_k$, $C_k$, $D_k$ — произвольные постоянные; $I_0(\gamma_k r)$ — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Рассмотрим первый случай условий теплообмена. Они удовлетворяются, если положить $C_k = 0$, $D_k = 0$. Удовлетворив условию (4), получим $\lambda_k = \mu_k/R$, где $\mu_k$ — корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Условие (3) с учетом ортогональности функции Бесселя дает соотношения, связывающие постоянные $A_k$ и $B_k$, после чего температурное поле в цилиндре определяется бесконечной системой некоторых постоянных $C_k^{(1)}$ по формуле

$$T = T_0 \left\{ 1 + C_0^{(1)} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}(\zeta - l) - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^\infty \frac{C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho) \operatorname{sh}\mu_k(l-\zeta)}{\operatorname{ch}\mu_k l} \right\}. \tag{12}$$

Удовлетворив условиям (1), (2), получим соотношения, связывающие постоянные $C_k^{(1)}$ и функцию $F_1(\eta)$:

$$\text{а)} \quad \int_0^\infty \eta F_1(\eta)\, J_0(\eta\rho)\, d\eta = \left[ C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho) \right] \quad (\rho < 1),$$

$$\text{б)} \quad \int_0^\infty F_1(\eta)\, J_0(\eta\rho)\, d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \tag{13}$$

$$\text{в)} \quad \int_0^\infty F_1(\eta)\, J_0(\eta\rho)\, d\eta = T_0 \left[ 1 - C_0^{(1)} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^\infty C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho) \operatorname{th}\mu_k l \right]$$
$$(\rho < 1),$$

где $l = L/R$.

Соотношения «а» и «б» формул (13) рассмотрим как парные интегральные уравнения относительно функции $F_1(\eta)$. Решение их получаем согласно формуле обращения [5]

$$F_1(\eta) = \frac{2}{\pi} C_0^{(1)} \frac{1}{\eta} \left( \frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} \int_0^1 \sin\eta y \sin\mu_k y\, dy. \tag{14}$$

Соотношение «в» умножаем последовательно на $\rho$ и $\rho J_0(\mu_n\rho)$, интегрируем в пределах от 0 до 1 с учетом ортогональности функций Бесселя и находим некоторые соотношения между $F_1(\eta)$ и $C_k^{(1)}$. Подставляя в них значение $F_1(\eta)$ (14), после некоторых преобразований для определения постоянных $C_k^{(1)}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$a_k^{(1)} C_k^{(1)} + \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^{(1)} C_n^{(1)} = \alpha_k^{(1)} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{15}$$

Здесь

$$a_0^{(1)} = 1/3, \quad a_{00}^{(1)} = \frac{\pi}{4} l \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}, \quad \alpha_0^{(1)} = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_m^{(1)} = 0;$$

$$a_m^{(1)} = \frac{\pi}{4} \mu_m \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \operatorname{th} \mu_m l, \quad a_{0m} = a_{s0} = \frac{1}{\mu_m} \left( \frac{\sin \mu_m}{\mu_m} - \cos \mu_m \right); \tag{16}$$

$$a_{ms}^{(1)} = \frac{\mu_s \sin \mu_m \cos \mu_s - \mu_m \sin \mu_s \cos \mu_m}{\mu_m^2 - \mu_s^2} \quad (m, \ s = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots).$$

Определив постоянные $C_k^{(1)}$ из системы (15), температурное поле в цилиндре и полупространстве находим соответственно по формулам (12) и (10) с учетом (14).

Термоупругий потенциал $\varphi$ определяем из первого уравнения (7), частное решение которого берем в виде

$$\varphi^1 = \frac{1 + \sigma^1}{2(1 - \sigma^1)} \alpha_T^1 \zeta \int_0^\infty \eta^{-1} F_1(\eta) J_0(\eta\rho) e^{\eta\zeta} d\eta, \tag{17}$$

$$\varphi = \frac{T_0 R^2 C_0^{(1)} \alpha_T}{6} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \zeta^3 + T_0 \alpha_T R^2 \left[ 1 - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} C_0^{(1)} \rho^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \sigma}{2(1 - \sigma)} \alpha_T T_0 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \zeta \sum_{k=1}^\infty \frac{C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \operatorname{ch} \mu_k (l - \zeta)}{\mu_k} \right]. \tag{18}$$

По известным термоупругим потенциалам компоненты напряжений и смещений вычисляются согласно формулам (8) дифференцированием.

Во втором случае условий теплообмена решение задачи строим аналогично. В конечном итоге задача сводится к определению некоторых постоянных $C_k^{(2)}$ из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений вида (15). Температурное поле в полупространстве определяется по формуле (10), если вместо функции $F_1(\eta)$ подставить функцию $F_2(\eta)$, которая имеет вид

$$F_2(\eta) = \frac{2}{\pi} T_0 [1 - C_0^{(2)}] \frac{\sin \eta}{\eta} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty C_k^{(2)} \int_0^1 \cos \eta y \cos \mu_k y dy, \tag{19}$$

а в цилиндре — согласно формуле (12), если заменить $C_k^{(1)}$ на $C_k^{(2)}$. При этом $C_0^{(1)}$ заменяется на $C_0^{(2)} \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}$ и $C_m^{(1)}$ на $C_m^{(2)} \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \operatorname{cth} \mu_k l$ $(m = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots)$.

Третий вид условий теплообмена математически сложнее предыдущих. В этом случае можно только положить $C_k = 0$, а остальные определяются из граничных условий и условий сопряжения. Окончательно задача сводится к определению двух бесконечных систем постоянных $C_k^{(3)}$, $C_k^{(4)}$ из двух взаимосвязанных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$a_k^{(3)} C_k^{(3)} + a_k^{(4)} C_k^{(4)} + \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^{(3)} C_n^{(3)} + \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^{(4)} C_n^{(4)} = \alpha_k^{(3)},$$

$$a_k^{(5)} C_k^{(3)} + a_k^{(4)} C_k^{(4)} + \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^{(5)} C_n^{(3)} + \sum_{n=0}^\infty a_{kn}^{(4)} C_n^{(4)} = \alpha_k^{(4)} \quad (k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots). \tag{20}$$

Коэффициенты $a_k^{(i)}$ $(i = 3, 4, 5, 6)$ являются известными величинами, зависящими от упругих, температурных и геометрических характеристик цилиндра и полупространства.

Температурное поле для полупространства вычисляется по формуле (10), если функцию $F_1(\eta)$ заменить на $F_3(\eta)$, а функцию $F_3(\eta)$ найти согласно формуле (14) при замене $C_k^{(1)}$ на $C_k^{(3)}$. Формулу, определяющую температурное поле в цилиндре, можно записать в виде двух составляющих, а именно:

$$T = T\,[C_k^{(3)}] + T\,[C_k^{(4)}], \tag{21}$$

где $T\,[C_k^{(3)}]$ выражается формулой (12) путем замены $C_k^{(1)}$ на $C_k^{(3)}$, а $T\,[C_k^{(4)}]$ имеет вид

$$T\,[C_k^{(4)}] = T_0 \left\{ \left[ 2\,(l^2 - \zeta^2) - \frac{1}{2} + \rho^2 \right] C_0^{(4)} - \right.$$

$$- \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^{(4)}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{(4)} I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right) \cos \frac{k\pi}{l}\zeta}{k I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)} +$$

$$\left. + 4C_0^{(4)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_k)\, J_0(\mu_k \rho)\, \mathrm{ch}\, \mu_k \zeta}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)\, \mathrm{ch}\, \mu_k l} - \frac{2\pi}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^{(4)} J_0(\mu_k \rho)\, \mathrm{ch}\, \mu_k \zeta}{\mathrm{ch}\, \mu_k l\, J_0(\mu_k) \left[ \mu_k^2 + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right]} \right\}. \tag{22}$$

Выражение для термоупругого потенциала не приводим из-за громоздкости.

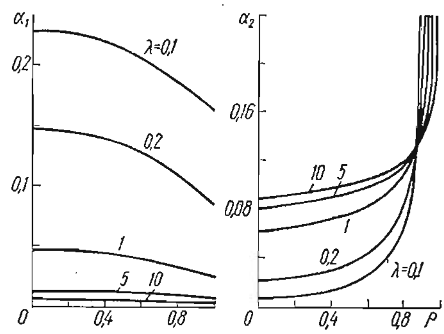

Рис. 1

Получив выражения для термоупругих потенциалов, согласно формулам (8) можно определить компоненты температурных напряжений и смещений, а следовательно, решить задачу при любых силовых граничных условиях. Для этого к решению (8) необходимо добавить компоненты напряжений и смещений от бигармонического потенциала и использовать способ решения работы [1]. Не останавливаясь на выкладках, приведем формулы для определения смещения $u_z$ и напряжения $\sigma_z$ в цилиндре при силовых граничных условиях работы [1] и условиях теплообмена (1) — (4). Эти формулы можно записать в виде трех составляющих, т. е.

$$\begin{aligned} u_z &= u_z(C_k^{(1)}) + u_z(D_k) + u_z(T), \\ \sigma_z &= \sigma_z(C_k^{(1)}) + \sigma_z(D_k) + \sigma_z(T). \end{aligned} \tag{23}$$

Величины $u_z\,(C_k^{(1)})$, $\sigma_z\,(C_k^{(1)})$ определяются по формулам (3.18) работы [1] и характеризуют силовые воздействия на систему, $u_z\,(D_k)$, $\sigma_z\,(D_k)$ определяются по тем же формулам при замене $C_k^{(1)}$ на $\alpha_T T_0 \frac{R}{\varepsilon} D_k$, а $D_k$ находится из некоторой бесконечной квазирегулярной системы линейных алгебраических уравнений; величины $u_z\,(T)$ и $\sigma_z\,(T)$ определяются формулами

$$u_z(T) = \alpha_T T_0 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} R \left\{ \frac{b_5}{b_4} l \left[ -1 + \frac{l\lambda_z^1}{2\lambda_z} C_0^{(1)} \right] + \frac{C_0^{(1)} \lambda_z^1}{2\lambda_z} \zeta^2 + \right.$$

$$+ \zeta b_5 \left[ \frac{1}{b_4} - 2b_1 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} C_0^{(1)} l \right] - \zeta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho)\, \mathrm{sh}\, \mu_k (l - \zeta)}{\mathrm{ch}\, \mu_k l} +$$

$$+ 2\alpha_T T_0 \pi^2 R \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \frac{b_1 \lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 L(k)}{\omega_k} \left\{ \frac{I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right) I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right)}{b_4} + \right.$$

$$\left. + \frac{k\pi}{l b_1} \left[ I_1\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right) I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right) - I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right) I_0\left(\frac{k\pi}{l}\right) \right] \right\} \sin \frac{k\pi}{l} \zeta, \tag{24}$$

$$\sigma_z^{(T)}(T) = \mu T_0 \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho)}{\operatorname{ch} \mu_k l} [\mu_k \zeta \operatorname{ch} \mu_k (l-\zeta) + \operatorname{sh} \mu_k (l-\zeta)] +$$

$$+ 4\alpha_T T_0 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} l\pi^3 \mu \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 L(k)}{\omega_k} \left\{ 2I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right) I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k\pi}{l}\left[\rho I_1\left(\frac{k\pi}{l}\right) I_1\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right) - I_0\left(\frac{k\pi}{l}\right) I_0\left(\frac{k\pi}{l}\rho\right)\right]\right\} \cos\frac{k\pi}{l}\zeta,$$

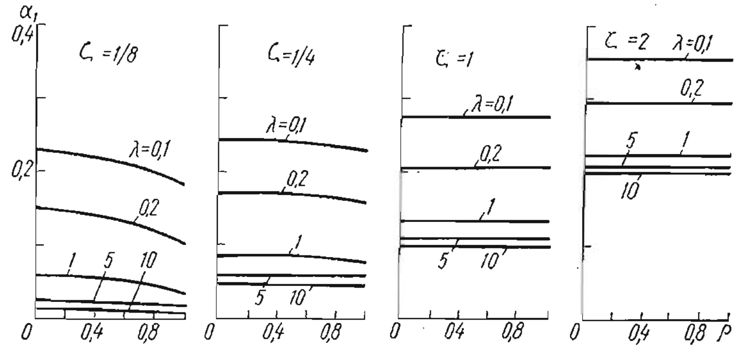


Рис. 2

где $b_i$ — некоторые соотношения коэффициентов Ляме;

$$\omega_k = -\frac{l}{k\pi}(2b_1 + b_2) I_1^2\left(\frac{k\pi}{l}\right) + \frac{k\pi}{l}\left[I_0^2\left(\frac{k\pi}{l}\right) - I_1^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right]; \tag{25}$$

$$L(k) = \frac{C_0^{(1)}[(-1)^k - 1]}{\pi^5 k^5} + \frac{1}{\pi k}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i^{(1)}[(-1)^k - \operatorname{ch}\mu_i l]\, t_{ik}}{\mu_i \operatorname{ch}\mu_i l};$$

$$t_{ik} = \frac{\mu_i^2 J_0(\mu_i)}{(\pi^2 k^2 + \mu_i^2 l^2)^2}.$$

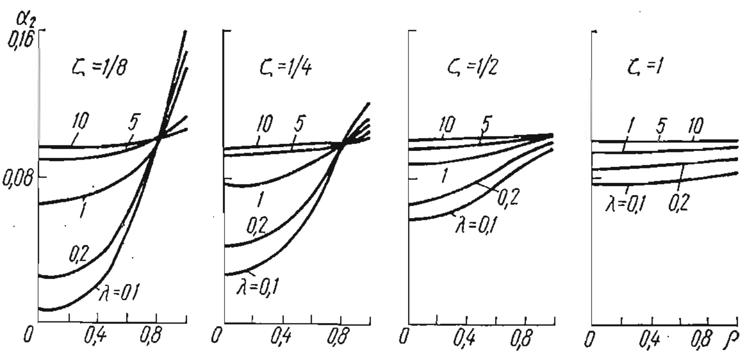


Рис. 3

Аналитическое исследование дало возможность выявить некоторые характерные особенности решения. В частности, на границе области контакта температурный градиент $\frac{\partial T}{\partial z}$ имеет степенную особенность вида $(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}+p}$, где параметр $p$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\sin \pi p = \frac{1}{1 + \lambda_z/\lambda_z^1}. \tag{26}$$

Величина $\lambda_z/\lambda_z^1$ может изменяться от нуля до бесконечности, поэтому $0 \leqslant \leqslant p \leqslant 1/2$. При $p = 0$ и $p = \frac{1}{2}$ получаем граничные случаи задачи.

Исследования показали, что бесконечные системы уравнений относительно постоянных $C_k^{(i)}$ квазирегулярны, и с учетом этого их решение найдено методом редукции из урезанных систем, а по известным $C_k^{(1)}$ проведены численные расчеты температурных полей и градиентов. На рис. 1 приведено распределение температурного поля и градиента в масштабе $\alpha_1 = T/T_0$ и $\alpha_2 = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{R}{T_0}$ в зоне контакта ($\zeta = 0$) при некоторых значениях отношения коэффициентов теплопроводности $\lambda = \lambda_z/\lambda_z^1$. Распределение тех же величин по высоте цилиндра изображено соответственно на рис. 2 и 3.


ЛИТЕРАТУРА

1. *Кизыма Я. М.* Осесимметричная задача о давлении упругого цилиндра на упругое полупространство.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4, с. 75—84.
2. *Кизыма Я. М.* Контактные задачи и их инженерные приложения. М., Изд. НИИМАШ, 1969, с. 21—31.
3. *Кізима Я. М.* Осесиметрична контактна задача для циліндра і півпростору у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 2, с. 131—134.
4. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 304 с.
5. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 542 с.



Тернопольский финансово-экономический институт



Поступила в редколлегию 19.I 1975 г.



УДК 539.3



*Б. Л. Пелех, А. А. Сяський, В. А. Сяський*


## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Задачи о концентрации напряжений около криволинейных отверстий в сферических оболочках с использованием классической теории достаточно полно освещены в работах [1, 2]. Исходя из уравнений обобщенной теории оболочек, учитывающей деформации поперечного сдвига (теории типа Тимошенко), исследуем распределение напряжений около криволинейного отверстия в трансверсально-изотропной сферической оболочке.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку радиуса $R$, толщины $2h$, ослабленную криволинейным отверстием, которая находится под равномерным внутренним давлением интенсивности $p_0$. Основное напряженное состояние оболочки считается безмоментным и равно

$$T_\rho^c = T_\lambda^0 = 2ph, \tag{1}$$

где $p = \frac{p_0 R}{4h}$.

Дополнительное напряженное состояние, вызванное наличием отверстия, будем определять исходя из уравнений уточненной теории оболочек [4]:

$$(\Delta\Delta - i\varkappa^2\Delta)\,\Phi = 0, \quad (\Delta - k^2)\,\psi = 0, \tag{2}$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}; \quad k^2 = \frac{2}{(1-\nu)\,\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{G_n};$$

$G_n$ — модуль сдвига; $k'$ — коэффициент сдвига; $\Delta$ — оператор Лапласа.

Используя метод возмущения формы границы [1], представим компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки в виде рядов