температур под конец процесса нагрева или охлаждения, найденные точным аналитическим методом, опираясь на решение классической задачи теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965. 486 с.
2. *Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.* Оптимальное управление нагревом металла. М., «Металлургия», 1972. 439 с.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
4. *Темкин А. Г.* Обратные методы теплопроводности. М., «Энергия», 1978. 464 с.
5. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, 1963, 153, № 1, с. 49—52.
6. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974. 267 с.
7. *Филимонов Ю. П., Старк С. Ю., Морозов В. А.* Металлургическая теплотехника. Т. 2. М., «Металлургия», 1974. 519 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 17.X 1975 г.

УДК 539.379.537.22

Б. П. Галапац, Б. М. Гнидец

МЕХАНОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ТЕЛЕ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

Дислокациями в значительной мере определяются механические и электрические свойства тел. Поэтому тело с внутренними несовершенствами типа дислокаций стало в последние десятилетия объектом пристального изучения. В данной работе с использованием уравнений макроскопической модели электропроводного тела [1, 4] исследуются эффекты взаимосвязи механических и электрических явлений в электропроводном теле с краевой дислокацией.

Равновесное состояние тела с заданным распределением дислокаций в пренебрежении влиянием поля электрического потенциала на напряженно-деформированное состояние описывается системой уравнений [1, 4]

$$\begin{gathered}
\operatorname{Div}\hat{\sigma} + \omega\vec{E} = 0, \\
\Delta\varphi - \rho\frac{C}{\varepsilon_0}\varphi = \beta\frac{K}{\varepsilon_0}e, \\
\vec{E} = -\operatorname{grad}\psi, \\
\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)e\delta_{ij} + 2Ge_{ij}, \\
\omega = \rho C\varphi + \beta K e, \\
\varphi + \psi = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\hat{\sigma}$, $\hat{e}$ — тензоры механических напряжений и упругих деформаций; e — первый инвариант тензора деформаций; ω — объемная плотность электрических зарядов; φ — отклонение электрического потенциала от его значения Φ_0 в недеформируемом состоянии; $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля; G, K — модули сдвига и всестороннего сжатия; ρ — плотность распределения масс; C — удельная электроемкость; ε_0 — диэлектрическая проницаемость в вакууме; β — электрострикционный коэффициент объемного расширения.

К уравнениям (1) необходимо присоединить условие совместности, которое в рассматриваемом случае запишется [5] так:

$$\operatorname{Ink}\hat{e} = \operatorname{sym}(\hat{\alpha} \times \vec{\nabla}), \tag{2}$$

где $\hat{\alpha}$ — тензор плотности дислокаций.

Рассмотрим бесконечное тело с краевой дислокацией, линия которой параллельна оси z, а вектор Бюргерса направлен по оси x (тогда лишь $\alpha_{zx} \neq 0$). В этом случае компоненты тензора напряжений можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}(E_x^2 - E_y^2), \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}(E_y^2 - E_x^2), \\
\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \varepsilon_0 E_x E_y, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \\
\sigma_{zz} = \frac{3K - 2G}{2(3K - G)}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),
\end{gathered} \tag{3}$$

и система (1), (2) сводится к определению функций U и ψ, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
\Delta\Delta U = -2\varepsilon_0 \frac{3K + G}{3K + 4G}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta\psi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta\psi\right)\right] + \frac{2G}{\varepsilon_0}\frac{\partial\alpha_{zx}}{\partial y}, \\
\Delta\psi - \rho\frac{C}{\varepsilon_0}\psi = -\frac{3\beta K}{2\varepsilon_0(3K + G)}\Delta U
\end{gathered} \tag{4}$$

и условиям на бесконечности

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \quad \psi = 0. \tag{5}$$

Второе из уравнений (4), записанное относительно объемного заряда ω:

$$\Delta\omega - \rho\frac{C}{\varepsilon_0}\omega = \beta K \Delta e,$$

совпадает с полученным в работе [6] методами статистической физики.

Искомые функции U и ψ представим в виде разложений в ряды по малому безразмерному параметру $\beta_0 = \beta\Phi_0$:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \beta_0^k, \quad \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \beta_0^k. \tag{6}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (4) и условия (5) и приравнивая выражения при одинаковых степенях β_0, получаем системы уравнений для последовательного определения коэффициентов разложения U_0, ψ_0 и U_k, ψ_k ($k = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered}
\Delta\Delta U_0 = -2\varepsilon_0 \frac{3K + G}{3K + 4G}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Delta\psi_0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Delta\psi_0\right) + \frac{2G}{\varepsilon_0}\frac{\partial\alpha_{zx}}{\partial y}\right], \\
\Delta\psi_0 - \rho\frac{C}{\varepsilon_0}\psi_0 = 0, \\
\Delta\Delta U_k = -2\varepsilon_0 \frac{3K + G}{3K + 4G}\sum_{m=0}^{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\Delta\psi_{k-m}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial y}\Delta\psi_{k-m}\right)\right], \\
\Delta\psi_k - \rho\frac{C}{\varepsilon_0}\psi_k = -\frac{3K}{2\varepsilon_0\Phi_0(3K + 4G)}\Delta U_{k-1}
\end{gathered} \tag{7}$$

и соответствующие условия на бесконечности

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \psi_0 = 0, \\
\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_k}{\partial x \partial y} = 0, \quad \psi_k = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Анализ систем (7), (8) показывает, что $\psi_0 \equiv 0$, $\psi_{2k} \equiv 0$ и $U_{2k-1} \equiv 0$. При этом нулевое приближение (функция U_0) определяет напряженное состояние в пренебрежении пондеромоторными силами (нелинейными составляющими в уравнениях (3), (4)), первое приближение (функция ψ_1) по известным механическим напряжениям определяет изменение электрического потенциала и распределение объемных зарядов, второе приближение (функция U_2) дает возможность оценить влияние пондеромоторных сил на напряженное состояние тела.

Пример. Рассмотрим бесконечное электропроводное тело с краевой дислокацией Вольтерра ($\alpha_{zx} = b_0\, \delta(x)\, \delta(y)$). Тогда

$$U_0 = -\frac{\delta G}{\pi} r \ln r \sin\theta,$$
$$\psi_1 = -\frac{3b_0 KG}{\varepsilon_0 \varepsilon_c \pi \Phi_0 (3K+4G)} \left[\frac{1}{r} - \varepsilon_c K_1(\varepsilon_c r)\right] \sin\theta, \tag{9}$$

где b_0 — параметр решетки; $\delta = b_0 \frac{3K+G}{3K+4G}$; $\varepsilon_c^2 = \rho\frac{C}{\varepsilon c}$; $K_1(\varepsilon_c r)$ — модифицированная функция Ханкеля; r, θ — полярные координаты в плоскости поперечного сечения. Подставляя выражения (9) в формулы (1), (3) и учитывая, что на бесконечности $\varphi = 0$, по нулевому и первому приближению получаем

$$(\sigma_{rr})_0 = (\sigma_{\theta\theta})_0 = -\frac{\delta G}{\pi}\frac{\sin\theta}{r}, \quad (\sigma_{r\theta})_0 = \frac{\delta G}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \tag{10}$$

$$\omega = -\frac{3\beta b_0 \varepsilon_c KG}{\pi(3K+4G)} K_1(\varepsilon_c r)\sin\theta. \tag{11}$$

Из формулы (11) видно, что электрические заряды концентрируются в окрестности центра дислокации ($\varepsilon_c r \leqslant 1$). На достаточном расстоянии от центра электрическая система эквивалентна диполю, помещенному в центре дислокации.

Для исследования влияния пондеромоторных сил находим второе приближение, ограничиваясь рассмотрением области $\varepsilon_c r \leqslant 0{,}5$ и пренебрегая величинами порядка 10^{-2} по сравнению с единицей. При этом

$$U_2 = \frac{D}{\Phi_0^2} r^2 \ln\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2}\left(\ln\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} - 1\right)\cos 2\theta, \tag{12}$$

$$(\sigma_{rr})_2 = \beta^2 D\left[\left(\frac{8b_0}{\delta} - 2\right)\ln^2\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} + 3\ln\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} - \frac{1}{2}\right]\cos 2\theta,$$
$$(\sigma_{\theta\theta})_2 = \beta^2 D\left[\left(2 - \frac{8b_0}{\delta}\right)\ln^2\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} + 5\ln\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} + \frac{1}{2}\right]\cos 2\theta, \tag{13}$$
$$(\sigma_{r\theta})_2 = \beta^2 D\left[\left(2 - \frac{8b_0}{\delta}\right)\ln^2\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} + 3\ln\frac{\gamma\varepsilon_c r}{2} - 1\right]\sin 2\theta.$$

Здесь $D = \frac{9\delta b_0 K^2 G^2}{32\pi^2\varepsilon_0(3K+4G)^2}$, γ — постоянная Эйлера.

Для численного анализа примем, что исследуемое тело изготовлено из меди, для которой $\rho = 9\cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $K = 1{,}1\cdot 10^{11}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $G = 4{,}6\cdot 10^{10}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $b_0 = 2{,}5\cdot 10^{-10}$ м. Согласно оценке, приведенной в работе [2], $C \approx 10^3 \frac{\text{Кл}}{\text{В}\cdot\text{кг}}$, $\beta \approx -10^{-4}\frac{1}{\text{В}}$. С учетом этого $\max(\sigma_{ij})_2$ в окрестности центра дислокации (10^{-10} м $\leqslant r \leqslant 5\cdot 10^{-10}$ м) не превышает $10^{-5}\%$ от $\max(\sigma_{ij})_0$. В центре дислокации напряжения, вычисленные по нулевому приближению, имеют сингулярность $\frac{1}{r}$, а напряжения, вызванные пондеромоторными силами — $\ln^2 \varepsilon_c r$. Таким образом, влияние пондеромоторных сил на напряженное состояние электропроводного тела с краевой дислокацией Вольтерра пренебрежимо мало.

Наличие дислокаций в металле увеличивает электрическое сопротивление. При равномерном распределении дислокаций, линии которых параллельны оси z, а вектор Бюргерса направленный по оси x, главные компоненты тензора сопротивления $\hat{R}$, созданного дислокациями, определяются формулами [3, 6]

$$R_{xx} = \frac{9}{32} \frac{\pi^2 m_0^2 N}{\hbar^3 q_0^2 k_f^6} \int\limits_0^{2k_f} k^2 |f(k)|^2 dk, \quad R_{yy} = 3R_{xx}, \quad R_{zz} = 0, \tag{14}$$

где $f(k)\sin\theta$ — преобразование Фурье от функции $\frac{2}{3}\left(e - \frac{\omega}{q_0 n_0}\right)\zeta_0$; m_0 — эффективная масса электрона; q_0 — заряд электрона; k_f — волновой вектор электрона на поверхности Ферми; $\hbar$ — постоянная Планка; n_0, ζ_0 — соответственно плотность электронов проводимости и энергия Ферми в электропроводном теле без дислокаций; N — количество дислокационных линий, пересекающих перпендикулярную им единичную площадку.

В предположении, что дислокации не взаимодействуют между собой, используя выражения (1), (10), (11), из формул (14) находим

$$R_{xx} = \frac{9}{4} \frac{\pi^2 \hbar}{q_0^2 k_f} \left(\frac{b_0 G}{3K + 4G}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{\beta K}{n_0 q_0}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta K}{n_0 q_0} \frac{\varepsilon_c}{k_f}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\beta K}{n_0 q_0}\right) \operatorname{arctg}\frac{2k_f}{\varepsilon_c} + \left(\frac{\beta K}{n_0 q_0}\right)^2 \frac{1}{2\left(1 + \left(\frac{2k_f}{\varepsilon_c}\right)^2\right)}\right]. \tag{15}$$

Для меди $\left(k_f = 1{,}53 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{м}},\ n_0 = 10^{28} \frac{1}{\text{м}^3}\right)$ при $N = 10^{15} \frac{1}{\text{м}^2}$ $R_{xx} \approx$ $\approx 3 \cdot 10^{-12}$ Ом · м, что согласуется с результатом, приведенным в работе [3]. При этом учет влияния объемного заряда на изменение электрического сопротивления составляет около процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Влияние деформации на перераспределение свободного электричества в тонких оболочках.— ФХММ, 1972, № 2, с. 57—62.
2. *Гнидец Б. М.* Определение равновесного состояния деформируемого электропроводного твердого раствора.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 3, с. 76—82.
3. *Займан Дж.* Электроны и фононы. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 488 с.
4. *Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.* Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з врахуванням електромагнітних процесів.— Вісн. АН УРСР, 1970, № 12, с. 18—26.
5. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
6. *Pfleiderer H.* Lineare Elastizitätstheorie und Thomas — Fermi-Modell bei Eigenspannungen in Metallen.— Phys. Stat. Sol., 1962, N 2, S. 1524—1538.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 15.VII 1975 г.

УДК 539.377

Я. М. Кизыма, Б. С. Окрепкий

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ЦИЛИНДРА

В работах [1—3] решена осесимметричная задача теории упругости о давлении упругого цилиндра на полупространство в случае изотропных и трансверсально-изотропных материалов. Предложенный способ решения