

В. М. Вигак

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ
НАГРЕВОМ ПЛАСТИНЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ
НА ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

На практике часто возникает задача наискорейшего нагрева тела до определенного температурного состояния при ограничениях на функцию управления (температуру греющей среды, тепловой поток и другие управляющие воздействия) и функцию распределения (температурное поле). Для решения такой задачи можно использовать теорию оптимального управления системами с распределенными параметрами [1, 2], позволяющую приближенно найти оптимальное управляющее воздействие, ограниченное сверху и снизу соответствующими константами, а не функциями от времени, что снижает, естественно, область его практического применения. В настоящей работе рассматриваются постановка и точный аналитический метод решения задачи оптимального по быстродействию управления нестационарным одномерным температурным режимом пластины при ограничениях на функции управления и распределения, зависящих от времени.

Пусть неограниченная пластина толщиной h нагревается на обеих граничных поверхностях с помощью конвективного теплообмена по закону Ньютона

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \rho} + Bi_1 [T(1, \tau) - t(\tau)] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \rho} - Bi_2 [T(0, \tau) - \theta(\tau)] = 0 \quad (\theta(\tau) < t(\tau)). \quad (2)$$

Необходимо найти такую функцию управления нагревом пластины $t(\tau)$, ограниченную сверху

$$t(\tau) \leq u(\tau) \quad (3)$$

предельно допустимым или возможным управлением $u(\tau)$, чтобы при ограничении на температуру пластины или функцию распределения $T(\rho, \tau)$ в фиксированной точке $\rho = \rho_1$ ($0 \leq \rho_1 \leq 1$)

$$T(\rho_1, \tau) \leq v(\tau) \quad (4)$$

за минимально короткое время τ_0 можно было перевести ее от начального состояния

$$T(\rho, 0) = f(\rho) \quad (5)$$

до конечного с максимальной температурой

$$T(1, \tau_0) = T_0 = \text{const} \quad (f(\rho) < T_0 < u(\tau_0)) \quad (6)$$

и максимальным перепадом температур в поперечном сечении пластины

$$T(1, \tau_0) - T(0, \tau_0) \leq \Delta T. \quad (7)$$

При этом функция распределения $T(\rho, \tau)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (8)$$

Здесь $\rho = \frac{x}{h}$ ($0 \leq \rho \leq 1$) — безразмерная координата; x ($0 \leq x \leq h$) — ось координат с началом на одной из граничных поверхностей пластины; $\tau = \frac{a\tau^*}{h^2}$ ($\tau \geq 0$) — безразмерное время; a — коэффициент температуропроводности; τ^* — время; $Bi_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}$ и $Bi_2 = \frac{\alpha_2 h}{\lambda}$ — критерии Био на граничных

поверхностях $\rho = 1$ и $\rho = 0$; α_1, α_2 — коэффициенты теплообмена; λ — коэффициент теплопроводности; $\theta(\tau)$ ($\theta(\tau) < t(\tau)$) — неуправляемая заданная температура греющей (охлаждающей) среды; $v(\tau)$ — предельно допустимая температура пластины в фиксированной точке $\rho = \rho_1$, ограниченная по технологическим или прочностным требованиям; ΔT — допустимый перепад температур в поперечном сечении пластины к концу процесса нагрева.

Как следует из постановки задачи оптимального управления (1) — (8), важным ее отличием является то, что в качестве условий конечной цели нагрева пластины выбраны условия (6), (7), а не условие [1, 2]

$$T(\rho, \tau_0) = f^*(\rho). \quad (9)$$

Условия (6), (7), характеризующие качество нагрева пластины, соответствуют практическим требованиям процесса нагрева [7]. Условие (6) зачастую может быть заменено условием, чтобы средняя интегральная температура пластины в поперечном сечении ее была равна заданной. Условию (9), строго говоря, можно удовлетворить лишь через определенный довольно большой промежуток времени либо приближенно, как это и сделано в работах [1, 2] при переходе к приложению полученных решений, что, по существу, соответствует удовлетворению условиям (6), (7).

Очевидно, функция управления $t(\tau)$ минимизирует время нагрева пластины τ тогда, когда в одном из ограничений (3) или (4) выполняется равенство, т. е.

$$t(\tau) = u(\tau) \quad (10)$$

и

$$T(\rho_1, \tau) < v(\tau), \quad (11)$$

или

$$T(\rho_1, \tau) = v(\tau) \quad (12)$$

и

$$t(\tau) < u(\tau), \quad (13)$$

либо в отдельных случаях одновременно выполняются равенства (10) и (12). В последнем случае достаточно удовлетворить одному из равенств (10) или (12), второе будет удовлетворяться тождественно.

Рассмотрим решение задачи (1) — (8), когда интенсивность нагрева пластины лимитирует функция управления, т. е. в случае выполнения условий (10) и (11). Тогда оптимальное управление нагревом пластины $t(\tau)$ определяется тривиально как предельно допустимое из условия (10). Для определения температурного режима пластины $T(\rho, \tau)$, соответствующего предельно допустимому управлению (10), необходимо найти решение обычной задачи теплопроводности (1), (2), (5), (8), (10), которое можно представить в следующем виде:

$$T(\rho, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau [Bi_1 u(\tau - \eta) T_1(\rho, \eta) + Bi_2 \theta(\tau - \eta) T_2(\rho, \eta)] d\eta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda_n \cos \lambda_n \rho + Bi_2 \sin \lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau). \quad (14)$$

Здесь

$$T_1(\rho, \tau) = \frac{1 + Bi_2 \rho}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n^2 \tau)}{\lambda_n^3 \Delta(\lambda_n)} (\lambda_n \cos \lambda_n \rho + Bi_2 \sin \lambda_n \rho);$$

$$T_2(\rho, \tau) = \frac{1 + Bi_1 - Bi_1 \rho}{Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\lambda_n \cos \lambda_n \rho + Bi_2 \sin \lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau);$$

$$A_n = \frac{1}{\lambda_n \Delta(\lambda_n)} \left[\int_0^1 f(\rho) \cos \lambda_n (1 - \rho) d\rho + \frac{Bi_1}{\lambda_n} \int_0^1 f(\rho) \sin \lambda_n (1 - \rho) d\rho \right] \\ (n = 1, 2, \dots);$$

$$B_n = \frac{1}{\lambda_n^3 \Delta(\lambda_n)} \left(\cos \lambda_n + \frac{Bi_1}{\lambda_n} \sin \lambda_n \right) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$\Delta(\lambda_n) = \frac{1}{2\lambda_n^2} \left\{ (\lambda_n^2 - Bi_1 Bi_2) \cos \lambda_n + [\lambda_n^2 (1 + Bi_1 + Bi_2) + Bi_1 Bi_2] \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n} \right\} \\ (n = 1, 2, \dots);$$

$\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\lambda (Bi_1 + Bi_2)}{\lambda^2 - Bi_1 Bi_2}.$$

Представив функции $t(\tau)$ и $\theta(\tau)$ в виде двух составляющих

$$t(\tau) = t^*(\tau) + \frac{q(\tau)}{\alpha_1}, \quad \theta(\tau) = \theta^*(\tau) + \frac{q^*(\tau)}{\alpha_2},$$

особое решение задачи теплопроводности (1), (2), (5), (8) при $Bi_1 = Bi_2 = 0$, не охватываемое решением (14), можно представить так:

$$T(\rho, \tau) = \frac{h}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau [\omega(\tau - \eta) T_1(\rho, \eta) + q^*(\tau - \eta) T_2(\rho, \eta)] d\eta + \\ + \int_0^1 f(\rho) d\rho + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n \rho \int_0^1 f(\rho) \cos \lambda_n \rho d\rho \exp(-\lambda_n^2 \tau). \quad (15)$$

Здесь $t^*(\tau)$ и $\theta^*(\tau)$ — управляемая и неуправляемая температуры греющих сред; $q(\tau)$ и $q^*(\tau)$ — управляемый и неуправляемый тепловые потоки на границе $\rho = 1$ и $\rho = 0$; $\omega(\tau)$ — предельно допустимый или возможный тепловой поток $q(\tau)$;

$$T_1(\rho, \tau) = -\frac{1}{6} (1 - 3\rho^2) + \tau - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} \cos \lambda_n \rho \exp(-\lambda_n^2 \tau);$$

$$T_2(\rho, \tau) = -\frac{1}{6} [1 - 3(1 - \rho)^2] + \tau - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \cos \lambda_n \rho \exp(-\lambda_n^2 \tau);$$

$$\lambda_n = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим второй возможный случай, когда интенсивность нагрева пластины ограничена функцией распределения, т. е. выполняются условия (12) и (13). Решение задачи оптимального управления (1) — (8) в этом случае находим с помощью определения предельно допустимого температурного режима $T(\rho, \tau)$ из решения задачи теплопроводности (2), (5), (8), (12). Тогда из граничного условия (1) нетрудно найти оптимальное управление $t(\tau)$, обеспечивающее предельно допустимый температурный режим.

Решение задачи теплопроводности (2), (5), (8), (12) можно представить в виде

$$T(\rho, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau [v(\tau - \eta) T_1(\rho, \eta) + Bi_2 \theta(\tau - \eta) T_2(\rho, \eta)] d\eta + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n (\lambda_n \cos \lambda_n \rho + Bi_2 \sin \lambda_n \rho)}{\sin \lambda_n \rho_1 [\lambda_n^2 \rho_1 + Bi_2 (1 + Bi_2 \rho_1)]} \int_0^{\rho_1} f(\rho) \sin \lambda_n (\rho_1 - \rho) d\rho \exp(-\lambda_n^2 \tau). \quad (16)$$

Здесь

$$T_1(\rho, \tau) = \frac{1 + \text{Bi}_2 \rho}{1 + \text{Bi}_2 \rho_1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n \cos \lambda_n \rho + \text{Bi}_2 \sin \lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau)}{\sin \lambda_n \rho_1 [\lambda_n^2 \rho_1 + \text{Bi}_2 (1 + \text{Bi}_2 \rho_1)]};$$

$$T_2(\rho, \tau) = \frac{\rho_1 - \rho}{1 + \text{Bi}_2 \rho_1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n \cos \lambda_n \rho + \text{Bi}_2 \sin \lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \tau)}{\lambda_n [\lambda_n^2 \rho_1 + \text{Bi}_2 (1 + \text{Bi}_2 \rho_1)]};$$

$\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) — корни характеристического уравнения

$$\text{tg } \lambda \rho_1 = - \frac{\lambda}{\text{Bi}_2}.$$

Следует отметить, что решение (16) задачи теплопроводности (2), (5), (8), (12) относится к классу обратных некорректных задач теплопроводности [4—6]. Правда, для области $\rho \in [0, \rho_1]$ это решение вполне корректное, поскольку для пластины толщиной ρ_1 условие (12) представляет собой граничное условие первого рода. Однако для области $\rho \in (\rho_1, 1]$ решение (16) некорректное. При этом с целью практического применения решения задачи (2), (5), (8), (12) для области $\rho \in (\rho_1, 1]$ необходимо использовать метод регуляризации А. Н. Тихонова [5, 6], позволяющий найти решение обратной задачи, обеспечивающее заданную точность определения искомой функции, либо, что проще, применить метод подбора, т. е. в каждом конкретном случае применением формулы (16) для области $\rho \in (\rho_1, 1]$ найти замкнутую область D отклонений исходных величин v, θ, f и Bi_2 от истинных их значений, обеспечивающую заданную допустимую точность определения функции $T(\rho, \tau)$.

В большинстве случаев ограничивающей является максимальная температура пластины при $\rho_1 = 1$, где возникают максимальные градиенты температур и температурные напряжения, а также другие нежелательные факторы, например оплавление, окисление, обезуглероживание либо пережог материала. А при $\rho_1 = 1$ выражение (16) представляет собой решение обычной задачи теплопроводности [3] при заданных условиях первого рода на границе $\rho = 1$ и условии третьего рода на границе $\rho = 0$.

Приведенные выше решения задачи оптимального управления (1) — (8) позволяют построить одноступенчатое, двуступенчатое, и т. д., многоступенчатое управление нагревом при ограничениях на каждом интервале температур на функцию управления либо на функцию распределения.

Пусть условие (4) не наложено либо оно удовлетворено при достижении функции управления даже своего предельно допустимого значения $u(\tau)$. Тогда оптимальная функция управления

$$t(\tau) = u(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0), \quad (17)$$

а время ее отключения τ_0 определяется из первого условия конечной цели (6), если второе условие (7) не наложено либо оно удовлетворено в процессе подъема температурного режима $T(\rho, \tau)$ до максимальной величины T_0 . Таким образом, получаем одноступенчатое управление (17).

Если же условие (7) не удовлетворено, то из условия (6) определяется лишь время переключения τ_1 управления (17) на управление, найденное из условия (1) с помощью предельно допустимого температурного режима (16) при $\rho_1 = 1$ и

$$v(\tau - \tau_1) = T_0 \quad (\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0). \quad (18)$$

Время отключения τ_0 при этом определяется из второго условия конечной цели

$$T(1, \tau_0 - \tau_1) - T(0, \tau_0 - \tau_1) = \Delta T, \quad (19)$$

где $T(\rho, \tau - \tau_1)$ ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$) — температурный режим (16) при условии (18).

Следовательно, получаем двухступенчатое управление нагревом пластины с управляющей функцией (17) и температурным режимом (14) либо (15) на первом этапе нагрева и температурным режимом (16) и управлением $t(\tau)$, найденным из условия (1), на втором. В качестве условия сопряжения первого и второго этапов нагрева выступает условие (6), где $T(\rho, \tau)$ ($0 \leq \tau \leq \tau_1$) — температурный режим (14) либо (15).

Аналогично получаем двухступенчатое управление нагревом пластины при ограничении на первом этапе на функцию управления, а на втором — на функцию распределения и отсутствии условия конечной цели (7) с той лишь разницей, что в качестве условия сопряжения выступает условие

$$T(\rho_1, \tau_1) = v(\tau_1), \quad (20)$$

а в качестве условия отключения —

$$T(1, \tau_0 - \tau_1) = T_0. \quad (21)$$

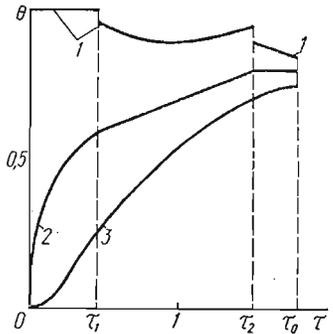
В условии (20) $T(\rho, \tau)$ ($0 \leq \tau \leq \tau_1$) — решение (14), а в условии (21) $T(\rho, \tau - \tau_1)$ ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$) — решение (16). Если условие (7) наложено, то из равенства (21) определяется лишь время переключения τ_2 на управление, найденное из граничного условия (1) с помощью решения (16), взятого при $\rho_1 = 1$ и $v(\tau - \tau_2) = T_0$ ($\tau_2 \leq \tau \leq \tau_0$), а время отключения управления τ_0 определяется из условия (19), где вместо τ_1 необходимо взять τ_2 . Итак, получаем трехступенчатое управление.

Если между вторым и третьим этапами рассмотренного трехступенчатого управления вклинится еще один этап с ограничением на функцию управления, то получим четырехступенчатое управление нагревом пластины с управляющей функцией (10) на первом и третьем этапах и управляющей функцией $t(\tau)$ на втором и четвертом, определяемой из условия (1) с помощью температурного режима (16), найденного при условии (12) на втором этапе и при условии $T(1, \tau - \tau_3) = T_0$ ($\tau_3 \leq \tau \leq \tau_0$) на четвертом. В качестве условий сопряжений будут условие (20) между первым и вторым этапами, условие $t(\tau_2 - \tau_1) = u(\tau_2 - \tau_1)$ между вторым и третьим и условие $T(1, \tau_3 - \tau_2) = T_0$ между третьим и четвертым этапами нагрева. Время отключения управления определяется из условия $T(1, \tau_0 - \tau_3) = T_0$. Так же можно построить и многоступенчатое управление нагревом пластины.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу оптимального управления нагревом пластины: требуется наискорейшим путем нагреть теплоизолированную с одной стороны ($Bi_2 = 0$) пластину толщиной h от начальной температуры $f(\rho) = 0$ до максимальной $T(1, \tau_0) = 0,8T_1$ с помощью конвективного теплообмена (1) при $Bi_1 = 1,5$, где T_1 — предельно допустимое управление, т. е. $u(\tau) = T_1 = \text{const}$. При этом температурный режим ограничен условием $T(1, \tau_0) \leq (0,5 + 0,2\tau) T_1$, а перепад температур к концу нагрева — условием $T(1, \tau_0) - T(0, \tau_0) \leq 0,05T_1$.

На рисунке показано найденное приведенным методом оптимальное управление нагревом поставленной задачи, представляющее собой кусочно-непрерывную функцию $t(\tau)/T_1$ (кривая 1) с двумя переключениями в моменты времени $\tau_1 = 0,446$ и $\tau_2 = 1,5$ и временем отключения $\tau_0 = 1,794$. Соответствующий температурный режим пластины $T(1, \tau)/T_1$ и $T(0, \tau)/T_1$ представлен кривыми 2, 3.

Таким образом, указанным путем можно построить многоступенчатое оптимальное по быстрдействию управление одномерным нестационарным температурным режимом пластины при ограничениях на функции управления и распределения, а также максимальные температуру тела и перепад



температур под конец процесса нагрева или охлаждения, найденные точным аналитическим методом, опираясь на решение классической задачи теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965. 486 с.
2. Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н. Оптимальное управление нагревом металла. М., «Металлургия», 1972. 439 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
4. Темкин А. Г. Обратные методы теплопроводности. М., «Энергия», 1978. 464 с.
5. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, 1963, 153, № 1, с. 49—52.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974. 267 с.
7. Филимонов Ю. П., Старк С. Ю., Морозов В. А. Металлургическая теплотехника. Т. 2. М., «Металлургия», 1974. 519 с.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 17.X 1975 г.

УДК 539.379.537.22

Б. П. Галапац, Б. М. Гнидец

МЕХАНОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ТЕЛЕ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

Дислокациями в значительной мере определяются механические и электрические свойства тел. Поэтому тело с внутренними несовершенствами типа дислокаций стало в последние десятилетия объектом пристального изучения. В данной работе с использованием уравнений макроскопической модели электропроводного тела [1, 4] исследуются эффекты взаимосвязи механических и электрических явлений в электропроводном теле с краевой дислокацией.

Равновесное состояние тела с заданным распределением дислокаций в пренебрежении влиянием поля электрического потенциала на напряженно-деформированное состояние описывается системой уравнений [1, 4]

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \hat{\sigma} + \omega \vec{E} &= 0, \\ \Delta \varphi - \rho \frac{C}{\varepsilon_0} \varphi &= \beta \frac{K}{\varepsilon_0} e, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \psi, \\ \sigma_{ij} &= \left(K - \frac{2}{3} G \right) e \delta_{ij} + 2G e_{ij}, \\ \omega &= \rho C \varphi + \beta K e, \\ \varphi + \psi &= \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\hat{\sigma}$, \hat{e} — тензоры механических напряжений и упругих деформаций; e — первый инвариант тензора деформаций; ω — объемная плотность электрических зарядов; φ — отклонение электрического потенциала от его значения Φ_0 в недеформируемом состоянии; \vec{E} — вектор напряженности электрического поля; G , K — модули сдвига и всестороннего сжатия; ρ — плотность распределения масс; C — удельная электроемкость; ε_0 — диэлектрическая проницаемость в вакууме; β — электрострикционный коэффициент объемного расширения.