

2. Гельфанд И. М., Фолин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 228 с.
3. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Об одной экстремальной задаче термодинамики для бесконечной цилиндрической оболочки. — ДАН СССР, 1967, 174, № 3, с. 534—537.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 211 с.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
25.IX 1975 г.

УДК 536.21.539.377

В. М. Вигак

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Применительно к деталям теплоэнергооборудования задача определения оптимального нестационарного температурного режима, обеспечивающего на всем протяжении переходного процесса в расчетных точках детали заданные предельно допустимые температурные напряжения, привела к постановке и решению так называемых оптимальных нестационарных задач теплопроводности [3, 4]. Оптимальный температурный режим для цилиндра $T(\rho, Fo)$, как и всякое нестационарное температурное поле, должен удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (1)$$

граничным условиям, например, третьего рода

$$\frac{\partial T(k, Fo)}{\partial \rho} - Bi_1 [T(k, Fo) - t_1(Fo)] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi_2 [T(1, Fo) - t_2(Fo)] = 0 \quad (3)$$

и начальному условию

$$T(\rho, 0) = f(\rho). \quad (4)$$

Здесь $\rho = \frac{r}{R_2}$ — текущий безразмерный радиус цилиндра; $k = \frac{R_1}{R_2}$ — отношение внутреннего радиуса к наружному; $Fo = \frac{a\tau}{R_2^2}$ — критерий Фурье; a — коэффициент температуропроводности; $Bi_1 = \frac{\alpha_1 R_2}{\lambda}$, $Bi_2 = \frac{\alpha_2 R_2}{\lambda}$ — критерии Био на внутренней и наружной поверхностях цилиндра; α_1, α_2 — коэффициенты теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности; $t_1(Fo)$ и $t_2(Fo)$ — температура среды внутри цилиндра и снаружи.

Кроме того, оптимальный температурный режим должен обеспечивать на всем протяжении переходного процесса заданные допустимые температурные напряжения на одной из поверхностей цилиндра, т. е. должен удовлетворять одному из условий, которые можно записать в следующем виде [1, 3, 4]:

$$\frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \rho T(\rho, Fo) d\rho - (1-c_1) T(k, Fo) = b_1, \quad (5)$$

$$\frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \rho T(\rho, Fo) d\rho - (1-c_2) T(1, Fo) = b_2, \quad (6)$$

где постоянные коэффициенты b_i и c_i ($i = 1, 2$) определяются в процессе аппроксимации относительных допустимых температурных напряжений $S_i = \frac{1-\nu}{\alpha_T E} \sigma_i$ ($i = 1, 2$) в рассматриваемом интервале температур ломаной линией и представления их в отдельных диапазонах температур линейной функцией температуры

$$\frac{1-\nu}{\alpha_T E} \sigma_i(T) = b_i - c_i T.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; α_T — коэффициент линейного расширения; σ_i — допустимые температурные напряжения на внутренней ($i = 1$) и наружной ($i = 2$) поверхностях цилиндра.

Решение уравнения (1) при краевых условиях (3) — (5), т. е. решение первой оптимальной нестационарной задачи теплопроводности при заданных температурных напряжениях на внутренней поверхности цилиндра (5) и условии теплообмена на наружной поверхности (3) при $t_2 = \text{const}$ имеет вид

$$T(\rho, Fo) = B_0 + B_1 \ln \rho + A_1 U_0(\lambda_1 \rho) \exp(\lambda_1^2 Fo) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n U_0(\lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 Fo). \quad (7)$$

Здесь

$$B_0 = \frac{b_1 + \left(\frac{1}{2} - c_1 \ln k + \frac{\ln k}{1-k^2} \right) \text{Bi}_2 t_2}{c_1 + \left(\frac{1}{2} - c_1 \ln k + \frac{\ln k}{1-k^2} \right) \text{Bi}_2}; \quad (8)$$

$$B_1 = (t_2 - B_0) \text{Bi}_2;$$

$$U_0(\lambda_1 \rho) = I_0(\lambda_1 \rho) - \frac{\text{Bi}_2 I_0(\lambda_1) + \lambda_1 I_1(\lambda_1)}{\text{Bi}_2 K_0(\lambda_1) - \lambda_1 K_1(\lambda_1)} K_0(\lambda_1 \rho);$$

$$U_1(\lambda_1 \rho) = I_1(\lambda_1 \rho) + \frac{\text{Bi}_2 I_0(\lambda_1) + \lambda_1 I_1(\lambda_1)}{\text{Bi}_2 K_0(\lambda_1) - \lambda_1 K_1(\lambda_1)} K_1(\lambda_1 \rho);$$

I_0 , I_1 и K_0 , K_1 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; $\lambda_1 > 0$ — корень характеристического уравнения

$$\frac{(1-k^2)(1-c_1)}{2} \lambda U_0(\lambda k) + k U_1(\lambda k) - U_1(\lambda) = 0; \quad (9)$$

$$U_0(\lambda_n \rho) = J_0(\lambda_n \rho) - \frac{\text{Bi}_2 J_0(\lambda_n) - \lambda_n J_1(\lambda_n)}{\text{Bi}_2 Y_0(\lambda_n) - \lambda_n Y_1(\lambda_n)} Y_0(\lambda_n \rho) \quad (n = 2, 3, \dots); \quad (10)$$

$$U_1(\lambda_n \rho) = J_1(\lambda_n \rho) - \frac{\text{Bi}_2 J_0(\lambda_n) - \lambda_n J_1(\lambda_n)}{\text{Bi}_2 Y_0(\lambda_n) - \lambda_n Y_1(\lambda_n)} Y_1(\lambda_n \rho) \quad (n = 2, 3, \dots);$$

J_0 , J_1 и Y_0 , Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода; $\lambda_n > 0$ ($n = 2, 3, \dots$) — корни уравнения (9), где функции U_0 и U_1 определяются выражениями (10).

Постоянные коэффициенты A_n ($n = 1, 2, \dots$) определяются из бесконечной системы уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_k^1 \rho U_0(\lambda_n \rho) U_0(\lambda_m \rho) d\rho = \int_k^1 \rho [f(\rho) - B_0 - B_1 \ln \rho] U_0(\lambda_m \rho) d\rho \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Решение (7) не охватывает частного случая, когда:

$$c_1 = - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\ln k}{1-k^2} \right) \text{Bi}_2}{1 - \text{Bi}_2 \ln k}. \quad (11)$$

При таком значении коэффициента c_1 знаменатель выражения (8) равен нулю и коэффициенты B_0 и B_1 становятся неопределенными. Поэтому решение первой оптимальной задачи для этого случая нельзя описать выражением (7). Можно показать, что особое решение задачи в таком случае соответствует равенству нулю первого корня характеристического уравнения (9), т. е. $\lambda_1 = 0$. Например, при значениях λ_1 , близких к нулю, уравнение (9) можно преобразовать к простому виду

$$\lambda^2 = - \frac{4 \left[(1 - \text{Bi}_2 \ln k) c_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln k}{1 - k^2} \right) \text{Bi}_2 \right]}{(1 + 2 \ln k) (1 - c_1) - \frac{k^2}{1 - k^2} (1 - 2 \ln k)},$$

откуда при $\lambda_1 = 0$ для коэффициента c_1 получаем выражение (11).

Особое решение задачи (1), (3) — (5) при условии выполнения равенства (11) имеет следующий вид:

$$T(\rho, \text{Fo}) = \frac{\omega \rho^2}{4} [1 + \text{Bi}_2 (1 - \ln \rho)] + \left[\text{Bi}_2 t_2 - \frac{\omega}{4} (2 + 2\text{Bi}_2 + \text{Bi}_2^2) \right] \ln \rho + \\ + \omega (1 - \text{Bi}_2 \ln \rho) \text{Fo} + A_1 (1 - \text{Bi}_2 \ln \rho) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n U_0(\lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \text{Fo}). \quad (12)$$

Здесь

$$\omega = \frac{8(b_1 - c_1 t_2)}{3 - 4c_1(1 + \ln k) + \frac{4 \ln k}{1 - k^2} - k^2(1 - \text{Bi}_2 \ln k)(1 - c_1) + \frac{\text{Bi}_2}{4}(5 - 8c_1)(1 - k^2)};$$

$\lambda_n > 0$ ($n = 2, 3, \dots$) — корни уравнения (9); функции $U_0(\lambda_n \rho)$ и $U_1(\lambda_n \rho)$ ($n = 2, 3, \dots$) определяются выражениями (10), а коэффициенты A_n ($n = 1, 2, \dots$) — из системы уравнений

$$A_1 \int_k^1 \rho (1 - \text{Bi}_2 \ln \rho)^2 d\rho + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_k^1 \rho U_0(\lambda_n \rho) (1 - \text{Bi}_2 \ln \rho) d\rho = \\ = \int_k^1 \rho f_1(\rho) (1 - \text{Bi}_2 \ln \rho) d\rho; \quad (13)$$

$$A_1 \int_k^1 \rho (1 - \text{Bi}_2 \ln \rho) U_0(\lambda_m \rho) d\rho + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_k^1 \rho U_0(\lambda_n \rho) U_0(\lambda_m \rho) d\rho = \\ = \int_k^1 \rho f_1(\rho) U_0(\lambda_m \rho) d\rho \quad (m = 2, 3, \dots),$$

где

$$f_1(\rho) = f(\rho) - \frac{\omega \rho^2}{4} [1 + \text{Bi}_2 (1 - \ln \rho)] + \\ + \left[\text{Bi}_2 t_2 - \frac{\omega}{4} (2 + 2\text{Bi}_2 + \text{Bi}_2^2) \right] \ln \rho.$$

Для частного случая при $\text{Bi}_2 = 0$ особое решение (12) принимает простой вид

$$\theta(\rho, \text{Fo}) = \frac{T(\rho, \text{Fo})}{b_1} = \frac{\omega^*}{4} (\rho^2 - 2 \ln \rho) + \omega^* \text{Fo} + A_1^* + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^* U_0(\lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 \text{Fo}), \quad (14)$$

где

$$\omega = \frac{8}{3 - k^2 + \frac{4 \ln k}{1 - k^2}};$$

коэффициенты A_n^* ($n = 1, 2, \dots$) определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений (13), которая при $f(\rho) = 0$ имеет решение

$$A_1^* = H - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{b_n - a_n},$$

$$A_n^* = \frac{1}{b_n - a_n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$H = -\frac{\omega^*}{8} \left(3 + k^2 + \frac{4k^2 \ln k}{1 - k^2} \right),$$

$$a_n = U_0(\lambda_n k) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{(1 - k^2) U_0(\lambda_n k)} \left\{ U_0^2(\lambda_n) - U_0^2(\lambda_n k) \left[k^2 + \frac{1}{4} (1 - k^2)^2 \lambda_n^2 \right] \right\}$$

$$(n = 2, 3, \dots).$$

Через некоторое время от начала процесса прогрева или охлаждения цилиндра при соответствующих напряжениях от механической нагрузки возможен случай ограничения интенсивности подъема или понижения температуры его из-за напряженного состояния наружной поверхности, а не внутренней. В этом случае для определения оптимального температурного режима необходимо решить уравнение (1) при краевых условиях (3), (4), (6). Возникает вторая оптимальная задача теплопроводности, решение которой представляется в виде (7), где

$$B_0 = \frac{b_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2 \ln k}{1 - k^2} \right) \text{Bi}_2 t_2}{c_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2 \ln k}{1 - k^2} \right) \text{Bi}_2}; \quad (15)$$

$\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) — корни характеристического уравнения

$$\frac{(1 - k^2)(1 - c_2)}{2} \lambda U_0(\lambda) + k U_1(\lambda k) - U_1(\lambda) = 0; \quad (16)$$

остальные коэффициенты и функции определяются так же, как и для первой оптимальной задачи.

Аналогично, как и для первой оптимальной задачи, из выражения (15) видно, что решение (7) для второй оптимальной задачи теплопроводности не охватывает частного случая, когда

$$c_2 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{k^2 \ln k}{1 - k^2} \right) \text{Bi}_2, \quad (17)$$

что равносильно $\lambda_1 = 0$ для уравнения (16).

Особое решение второй оптимальной задачи в случае выполнения условия (17) представляется в виде (12), где допустимая безразмерная скорость изменения температуры цилиндра

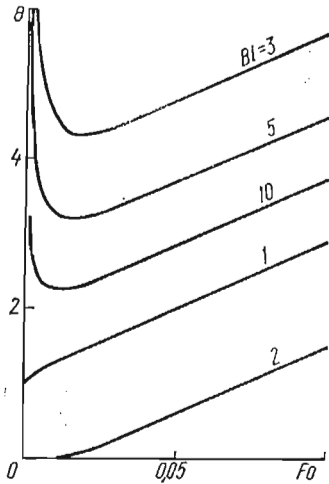
$$\omega = \frac{8(b_2 - c_2 t_2)}{1 + k^2 + \frac{4k^2 \ln k}{1 - k^2} - \frac{3}{4}(1 - k^2) \text{Bi}_2 - (2 + k^2) c_2};$$

$\lambda_n > 0$ ($n = 2, 3, \dots$) — корни уравнения (16); остальные коэффициенты и функции определяются так же, как и для первой задачи.

Безразмерное время перехода F_0 от температурного режима для первой оптимальной задачи к температурному режиму для второй определяется из условия, что в момент перехода температурный режим для первой задачи удовлетворяет условию (6).

Аналогично определяется время перехода от температурного режима для предыдущего ограничительного отрезка прямой допустимых температурных напряжений к температурному режиму для последующего отрезка, если допустимые напряжения в рассматриваемом диапазоне температур аппроксимированы ломаной линией [4].

Оптимальные температурные режимы (7) или (12), найденные путем решения первой и второй оптимальной задач, могут быть обеспечены только за счет соответствующего теплового потока или теплообмена, созданного на внутренней поверхности цилиндра, т. е. путем управления тепловым потоком или теплообменом на внутренней поверхности. Например, при теплообмене, описываемом граничным условием третьего рода (2), в качестве так называемой управляющей функции может быть определена или температура греющей среды $t_1(Fo)$ при заданном критерии $Bi_1(Fo)$ (расходе греющей среды), или $Bi_1(Fo)$ при заданной температуре $t_1(Fo)$.



При решении приведенных оптимальных задач теплопроводности рассмотрен случай, когда в качестве заданного выбрано условие теплообмена на наружной поверхности цилиндра (3), а в качестве управляемого — условие на внутренней поверхности (2), что практически применимо при определении оптимальных температурных режимов для деталей оборудования в виде цилиндрических сосудов, например паропроводов, прогреваемых и расхолаживаемых с внутренней стороны.

Однако аналогичные задачи возникают для цилиндрических деталей, например роторов турбин, для которых в качестве управляемого выступает условие теплообмена на наружной поверхности (3), а в качестве заданного — условие теплообмена на внутренней поверхности (2). Нетрудно показать, что для определения оптимальных температурных режимов в последнем случае можно использовать решение (7) или (12). При этом необходимо во всех выражениях вместо наружного радиуса R_2 брать внутренний R_1 и, наоборот, вместо $R_1 - R_2$, а вместо Bi_2 и t_2 — $-Bi_1$ и t_1 .

Для паропровода размером 325×60 мм на рисунке приведены кривые изменения безразмерных температур $\theta(k, Fo)$ (кривая 1) и $\theta(1, Fo)$ (кривая 2) на внутренней и наружной поверхностях и безразмерная температура греющей среды $t_1(Fo)/b_1$ при $Bi_2 = 3; 5; 10$, рассчитанные с помощью формулы (14) и условия теплообмена (2). Как видно из рисунка, оптимальный температурный режим представляет собой в начальный момент прогрева тепловой удар с последующим переходом в квазистационарный режим.

Таким образом, оптимальные нестационарные задачи теплопроводности в отличие от задач теплопроводности в обычной постановке [2] кроме основных решений (например, решения (7)) имеют еще особые решения (например, решение (12)) при соответствующих соотношениях между коэффициентами c_1 или c_2 и критерием Bi_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964. 517 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
3. Підстригач Я. С., Вігак В. М. Про оптимальний режим нагрівання порожнистого циліндра. — Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 12, с. 1105—1108.
4. Подстригач Я. С., Вігак В. М., Прокопенко А. Г. Оптимальные температурные режимы нагрева ротора турбомашин и паропроводов. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1973, вып. 13, с. 75—80.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
15.IX 1974 г.