

для оптимального режима нагрева без учета ограничений (штрихпунктирные линии) и с учетом ограничений (сплошные) на температуру внешней среды. Из приведенных графиков видно, что при заданной максимальной температуре  $T_0$  с уменьшением величины допустимой температуры  $T_{0c}$  внешней среды продолжительность нагрева  $\mu_1$  увеличивается. С увеличением коэффициента теплоотдачи продолжительность нагрева уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Будз С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки. — Прикл. механика, 1974, № 10, с. 14—20.
2. Бурак Я. И., Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г., Ирза Е. М. Оптимизация режимов нагрева сферической оболочки. — В кн.: Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Канев, 1974, с. 44—50.
3. Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г. Определение оптимальных по напряжениям режимов нагрева сферической оболочки. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 107—110.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 211 с.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
10.IX 1975 г.

УДК 539.377

Л. П. Беседина, Я. И. Бурак, Н. И. Веремчук

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Решения экстремальных задач термоупругости применительно к условиям локальной термообработки цилиндрических оболочек, основанные на минимизации функционала энергии упругой деформации, при заданных ограничениях на искомые функции в фиксированных сечениях рассмотрены в работах [1, 3]. В настоящей работе для свободной на краях конечной и бесконечной цилиндрических оболочек проведены исследования решений экстремальной задачи термоупругости для функционала энергии упругой деформации оболочки в зависимости от выбора интегрального вида ограничений на температурное поле применительно к конкретным условиям локального нагрева.

**Постановка и решение экстремальной задачи.** Рассмотрим задачу нахождения оптимальных (вызывающих минимальные температурные напряжения) постоянных по толщине осесимметричных температурных полей  $T(x)$  в свободной на краях цилиндрической оболочке радиуса  $R$ , толщины  $2h$  и длины  $2L$ . Энергию упругой деформации оболочки представим функционалом

$$K[\omega_0, T] = \frac{\pi E h R^2}{2a} \int_{-l}^l [(\omega_0'')^2 + 4(\omega_0 - \alpha T)^2] dx, \quad (1)$$

заданным на множестве функций  $\omega_0(x) = \frac{w(x)}{R}$ ,  $T(x)$ , которые связаны между собой разрешающим уравнением [4]

$$\omega_0^{IV}(x) + 4[\omega_0(x) - \alpha T(x)] = 0. \quad (2)$$

Здесь  $w(x)$  — функция прогибов;  $x = \frac{az}{R}$ ;  $l = \frac{aL}{R}$ ;  $z$  — осевая координата;  $E$  — модуль упругости;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $\alpha^4 = 0,75(1 - \nu^2)R^2h^{-2}$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона; штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ .

Искомые оптимальные температурные поля будем определять на основании решения вариационной задачи о нахождении экстремалей функционала (1) на множестве функций  $w_0(x)$ ,  $T(x)$ , удовлетворяющих уравнению (2), условиям свободного опирания краев

$$w_0''(\pm l) = 0, \quad w_0'''(\pm l) = 0 \quad (3)$$

и дополнительным ограничениям вида

$$\Phi_{m_i}[T] \equiv \int_{-l_i}^{l_i} x^{m_i} T(x) dx - A_{m_i}^* = 0, \quad l_1 \leq l, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

соответствующим заданию моментных характеристик порядка  $m_i$ , где  $m_i$  — натуральные несовпадающие между собой числа;  $A_{m_i}^*$  — система параметров, которая может быть использована, в частности, для удовлетворения конкретным условиям локального нагрева в фиксированных сечениях оболочки. Эта задача сводится [2] к нахождению экстремалей функционала

$$K^* [w_0, T, A_{m_i}] = \frac{\pi E h R^3}{2a} \int_{-l}^l \left\{ (w_0'')^2 + 4(w_0 - \alpha T)^2 + \kappa(x) [w_0^{IV} + 4(w_0 - \alpha T)] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \gamma_{m_i} (x^{m_i} T - A_{m_i}^*) [S_+(x + l_1) - S_+(x - l_1)] \right\} dx \quad (A_{m_i}^* = 2l_1 A_{m_i}) \quad (5)$$

на множестве  $w_0(x)$ ,  $T(x)$  и  $A_{m_i}$ , удовлетворяющем условиям (3). Здесь  $\kappa(x)$ ,  $\gamma_{m_i}$  — множители Лагранжа.

Пусть искомые оптимальные температурные поля должны удовлетворять  $k$  условиям локального нагрева. Поэтому из  $n$  параметров  $A_{m_i}$  примем  $k$  заданными, а остальные  $n - k$  — варьируемыми. Не умаляя общности, будем считать заданными первые  $k$  параметров  $A_{m_i}$ . В этом случае из решения сформулированной вариационной задачи приходим к следующей системе уравнений для определения экстремальных решений:

$$w_0^{IV} + 4(w_0 - \alpha T) = 0, \\ w_0 - \alpha T = \sum_{i=1}^k \gamma_{m_i} x^{m_i} [S_+(x + l_1) - S_+(x - l_1)], \quad i = \overline{1, k}, \quad (6) \\ \gamma_{m_i} = 0, \quad i = \overline{k+1, n}$$

и граничным условиям

$$T''(\pm l) = 0, \quad T'''(\pm l) = 0 \quad \text{при } l_1 < l \quad (7)$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} T''(\pm l) &= \sum_{i=1}^k m_i \gamma_{m_i} (\pm l_1)^{m_i-1}, \\ T'''(\pm l) &= \sum_{i=1}^k m_i (m_i - 1) \gamma_{m_i} (\pm l_1)^{m_i-2} \end{aligned} \right\} \text{при } l_1 = l, \quad (8)$$

которые в рассматриваемой задаче в соответствии со вторым из уравнений (6) эквивалентны условиям свободного опирания краев (3).

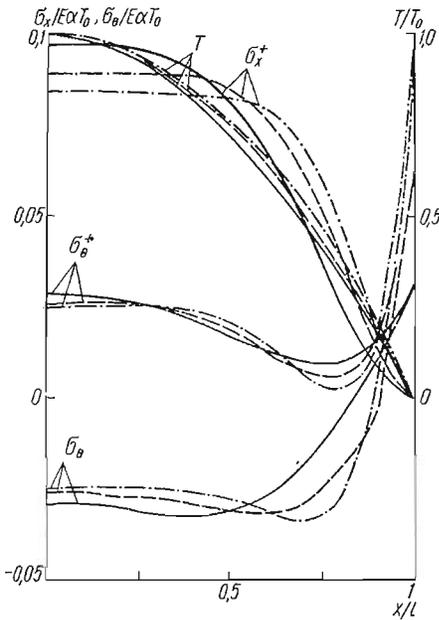
Система уравнений (6) и граничные условия (7), (8) дают возможность получить оптимальные температурные поля, соответствующие минимальному количеству ограничений (4), необходимому для удовлетворения условий локального нагрева. При заданных  $k$  условиях локального нагрева оптимальные решения системы (6) будут зависеть от того, на каком семействе экстремалей (выбор параметров  $m_i$ ) ищется решение. Исследования оптимальных температурных полей и напряжений в зависимости от выбора семейства экстремалей применительно к конкретным условиям локального нагрева проведены на примерах свободной на краях конечной и бесконечной цилиндрической оболочек.

Свободная на краях конечная цилиндрическая оболочка. В качестве условий локального нагрева области  $|x| \leq l_1$  возьмем следующие:

$$T(0) = T_0, \quad T'(0) = 0, \quad T(\pm l_1) = 0. \quad (9)$$

Примем, что  $l_1 = l$ . Ограничимся симметричными относительно центрального сечения  $x = 0$  решениями системы уравнений (6). Полагая  $k = 2$ ,  $m_i = 2(i + n_0)$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha T(x) &= C_0 + C_1 x^2 - \\ &- \sum_{i=1}^2 \gamma_{2(i+n_0)} \left[ 1 + \frac{x^4}{(2(i+n_0)+1)(2(i+n_0)+3)(i+n_0+1)(i+n_0+2)} \right] x^{2(i+n_0)}, \\ \omega_0(x) &= C_0 + C_1 x^2 - \\ &- \sum_{i=1}^2 \gamma_{2(i+n_0)} \frac{x^{2(i+n_0+2)}}{(2(i+n_0)+1)(2(i+n_0)+3)(i+n_0+1)(i+n_0+2)}, \end{aligned} \quad (10)$$



где  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $\gamma_{2(i+n_0)}$  — константы, определяемые из граничных условий (3) и условий локального нагрева (9).

Численные исследования оптимальных температурных полей и напряжений в зависимости от параметра  $n_0$  проведены для оболочки с  $\frac{R}{h} = 100$ ,  $2L = R$  при  $\nu = 0,3$ . На рисунке представлены оптимальные температурные поля  $T(x)$ , осевые  $\sigma_x$  и кольцевые  $\sigma_\theta$  напряжения на внешней ( $\sigma_x^+$ ,  $\sigma_\theta^+$ ) и внутренней ( $\sigma_x^-$ ,  $\sigma_\theta^- = -\sigma_x^+$ ) поверхностях оболочки для  $n_0 = 0$  (сплошные),  $n_0 = 1$  (штриховые) и  $n_0 = 2$  (штрихпунктирные линии). Из графиков видно, что с повышением порядка моментных характеристик температурного поля соответствующие экстремальным решениям уровни напряжений в зоне максимальных температур понижаются.

Температурные напряжения  $\sigma_x^+(0)$ ,  $\sigma_\theta^+(0)$  в сечении  $x = 0$  на внешней поверхности оболочки для более широкого диапазона изменения параметра  $n_0$  приведены в табл. 1. Напряжения  $\sigma_x^-(0)$ ,  $\sigma_\theta^-(0)$  в сечении  $x = 0$  на внутренней поверхности оболочки равны по величине и противоположны по знаку соответствующим напряжениям на внешней поверхности ( $\sigma_x^-(0) = -\sigma_x^+(0)$ ,  $\sigma_\theta^-(0) = -\sigma_\theta^+(0)$ ).

Бесконечная цилиндрическая оболочка  $l \rightarrow \infty$ . Пусть заданы условия (9) локального нагрева области  $|x| \leq l_1$ . Симметричные относительно центрального сечения  $x = 0$  экстремальные решения системы уравнений (6) при  $k = 4$ ,  $m_i = 2(i + n_0)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha T(x) &= C_0 + C_1 x^2 - \\ &- \sum_{i=1}^4 \gamma_{2(i+n_0)} \left[ 1 + \frac{x^4}{(2(i+n_0)+1)(2(i+n_0)+3)(i+n_0+1)(i+n_0+2)} \right] x^{2(i+n_0)} \quad (11) \\ &\text{при } |x| \leq l_1, \\ \omega_0(x) &= C_0 + C_1 x^2 - \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 \gamma_{2(i+n_0)} \frac{x^{2(i+n_0+2)}}{(2(i+n_0)+1)(2(i+n_0)+3)(i+n_0+1)(i+n_0+2)} \quad \text{при } |x| \leq l_1, \quad (12)$$

$$\alpha T(x) = 0, \quad w_0(x) = 0 \quad \text{при } |x| \geq l_1.$$

Таблица 1

Температурные напряжения	$n_0$							
	-1	0	1	2	3	4	5	$\infty$
$\frac{\sigma_x^+(0)}{E\alpha T_0}$	0,1183	0,0976	0,0896	0,0842	0,0795	0,0751	0,0707	0,0370
$\frac{\sigma_\theta^+(0)}{E\alpha T_0}$	0,0418	0,0293	0,0269	0,0253	0,0238	0,0225	0,0212	0,0110

Параметры  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $\gamma_{2(i+n_0)}$  определяются из условий локального нагрева (9) и следующих уравнений:

$$C_0 + C_1 l_1^2 - \sum_{i=1}^4 \gamma_{2(i+n_0)} \frac{l_1^{2(i+n_0+2)}}{(2(i+n_0)+1)(2(i+n_0)+3)(i+n_0+1)(i+n_0+2)} = 0,$$

$$C_1 l_1 - \sum_{i=1}^4 \gamma_{2(i+n_0)} \frac{l_1^{2(i+n_0+3)}}{(2(i+n_0)+1)(2(i+n_0)+3)(i+n_0+1)} = 0, \quad (13)$$

$$C_1 - \sum_{i=1}^4 \gamma_{2(i+n_0)} \frac{l_1^{2(i+n_0+1)}}{(2(i+n_0)+1)(i+n_0+1)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 \gamma_{2(i+n_0)} \frac{l_1^{i+n_0+1}}{i+n_0+1} = 0.$$

Таблица 2

Температурные напряжения	$n_0$						
	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{\sigma_x^+(0)}{E\alpha T_0}$	0,4391	0,2635	0,2049	0,1757	0,1581	0,1464	0,1379
$\frac{\sigma_\theta^+(0)}{E\alpha T_0}$	0,1317	0,0790	0,0615	0,0527	0,0474	0,0439	0,0413

Исследования оптимальных температурных напряжений в сечении  $x = 0$  в зависимости от порядка моментных характеристик (параметра  $n_0$ ) температурного поля проводились для оболочки с  $\frac{R}{h} = 100$ ,  $\nu = 0,3$  при  $2l_1 = a$ . Напряжения  $\sigma_x^+(0)$ ,  $\sigma_\theta^+(0)$  для  $n_0 = -1,5$  приведены в табл. 2, из которой видно, что, как и для случая оболочки конечной длины, с увеличением параметра  $n_0$ , характеризующего порядок исходных моментных характеристик температурного поля, уровни температурных напряжений в центральном сечении понижаются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беседина Л. П., Бурак Я. И. Об оптимальных условиях локальной термообработки цилиндрической оболочки конечной длины при различных способах закрепления торцевых сечений.— ФХММ, 1969, 5, № 5, с. 621—624.

2. Гельфанд И. М., Фолин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 228 с.
3. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Об одной экстремальной задаче термодинамики для бесконечной цилиндрической оболочки. — ДАН СССР, 1967, 174, № 3, с. 534—537.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 211 с.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
25.IX 1975 г.

УДК 536.21.539.377

В. М. Вигак

### ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Применительно к деталям теплоэнергооборудования задача определения оптимального нестационарного температурного режима, обеспечивающего на всем протяжении переходного процесса в расчетных точках детали заданные предельно допустимые температурные напряжения, привела к постановке и решению так называемых оптимальных нестационарных задач теплопроводности [3, 4]. Оптимальный температурный режим для цилиндра  $T(\rho, Fo)$ , как и всякое нестационарное температурное поле, должен удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (1)$$

граничным условиям, например, третьего рода

$$\frac{\partial T(k, Fo)}{\partial \rho} - Bi_1 [T(k, Fo) - t_1(Fo)] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi_2 [T(1, Fo) - t_2(Fo)] = 0 \quad (3)$$

и начальному условию

$$T(\rho, 0) = f(\rho). \quad (4)$$

Здесь  $\rho = \frac{r}{R_2}$  — текущий безразмерный радиус цилиндра;  $k = \frac{R_1}{R_2}$  — отношение внутреннего радиуса к наружному;  $Fo = \frac{a\tau}{R_2^2}$  — критерий Фурье;  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $Bi_1 = \frac{\alpha_1 R_2}{\lambda}$ ,  $Bi_2 = \frac{\alpha_2 R_2}{\lambda}$  — критерии Био на внутренней и наружной поверхностях цилиндра;  $\alpha_1, \alpha_2$  — коэффициенты теплоотдачи;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $t_1(Fo)$  и  $t_2(Fo)$  — температура среды внутри цилиндра и снаружи.

Кроме того, оптимальный температурный режим должен обеспечивать на всем протяжении переходного процесса заданные допустимые температурные напряжения на одной из поверхностей цилиндра, т. е. должен удовлетворять одному из условий, которые можно записать в следующем виде [1, 3, 4]:

$$\frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \rho T(\rho, Fo) d\rho - (1-c_1) T(k, Fo) = b_1, \quad (5)$$

$$\frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \rho T(\rho, Fo) d\rho - (1-c_2) T(1, Fo) = b_2, \quad (6)$$