

4. Райсснер Э. О некоторых вариационных принципах теории упругости.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., 1961, с. 358—364.
5. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. К вопросу о вариационных принципах в теории оболочек.— В кн.: Теоретическая и прикладная математика. Львов, 1963, с. 68—94.
6. Nowacki W. Thermoelastic Distorsion Problems.— Bull. d. L'acad. pol. d. sci. s. d. sci. techn., 1966, 14, N 3, p. 342—349.
7. Timochenko S. P. On the corrections of shear of the differential equations for transverse vibrations of Prismatic Bars.— Phil. mag. Ser. 6, 1921. 41, p. 744—752.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
15.XII 1975 г.

УДК 539.377

Я. И. Бурак, С. Ф. Будз

#### ОПТИМИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Решение рассматриваемой задачи при отсутствии ограничений на изменение температуры внешней среды получено в работах [1—3]. В настоящей работе исследуется тонкостенная теплоизолированная на внутренней поверхности замкнутая сферическая оболочка радиуса  $R$  и постоянной толщины  $2h$ . На внешней поверхности оболочки осуществляется конвективный теплообмен со средой по закону Ньютона. Начальная температура оболочки постоянна и равна температуре внешней среды.

Распределение по толщине оболочки нестационарного температурного поля в произвольный момент времени представим кубическим законом [1]

$$t(\gamma, u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{dT}{du} + \frac{\gamma}{2h} \left( \frac{\gamma^3}{3h^2} - \frac{1}{5} \right) \frac{dT_*}{du} + \frac{\gamma}{h} T_* + T, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — координата по толщине оболочки, отсчитываемая от срединной поверхности;  $u = \frac{\tau}{a^2 h^2}$ ;  $a^{-2}$  — коэффициент температуропроводности;  $\tau$  — время;  $T$ ,  $T_*$  — усредненная температура и температурный момент, которые должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} (4 + \text{Bi}) \frac{dT_*}{du} + 2 \left( 1 + \frac{2\text{Bi}}{3} \right) T_* + \text{Bi} T &= \text{Bi} t^c, \\ \frac{dT}{du} - \frac{2}{5} \frac{dT_*}{du} - T_* &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $t^c$  — температура внешней среды;  $\text{Bi}$  — безразмерный коэффициент Био. При этом температура отсчитывается от своего начального значения.

Учитывая нулевые начальные условия для функции  $t(\gamma, u)$ , на основании закона (1) получаем начальные условия для  $T$  и  $T_*$ :

$$T(0) = 0, \quad \frac{dT(0)}{du} = 0, \quad T_*(0) = 0, \quad \frac{dT_*(0)}{du} = 0. \quad (3)$$

При отсутствии внешнего силового нагружения напряженное состояние оболочки характеризуется меридиональными  $\sigma_s$  и кольцевыми  $\sigma_\beta$  напряжениями, которые определяются по формулам [4]

$$\sigma_s = \sigma_\beta \equiv \sigma = \frac{E\alpha_t}{1-\nu} (T - t), \quad (4)$$

где  $\alpha_t$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим задачу об определении оптимального по напряжениям режима нагрева по толщине сферической оболочки при следующих ограничениях на изменение температуры  $t^c$  внешней среды,  $t^+$  внешней поверхности оболочки и напряжений  $\sigma^+$  на этой поверхности:

а) функции  $t^c(u)$  и  $t^+(u)$  для  $0 \leq u \leq u_1$  неотрицательны и ограничены значениями  $T_{0c}$  и  $T_0$  соответственно, т. е.

$$0 \leq t^c(u) \leq T_{0c}, \quad 0 \leq t^+(u) \leq T_0 \quad \text{для} \quad 0 \leq u \leq u_1; \quad (5)$$

б) функции  $t^+(u)$  подчинена системе функциональных условий вида

$$\int_0^{u_1} u^i t^+(u) du = A_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Здесь  $A_i$  — некоторые постоянные;  $u_1$  — продолжительность режима нагрева;

в) температурные напряжения  $\sigma^+$  на внешней поверхности оболочки изменяются в заданных пределах

$$\sigma_0^+ \leq \sigma^+ \leq \sigma_*^+, \quad (7)$$

где  $\sigma_0^+ \leq 0$ ,  $\sigma_*^+ \geq 0$ .

При определении оптимальных режимов нагрева будем исходить из условия минимизации функционала энергии упругой деформации оболочки

$$M = A \int_0^{u_1} F\left(u, T_*, \frac{dT_*}{du}\right) du, \quad (8)$$

где

$$F = \frac{11}{35} \left(\frac{dT_*}{du}\right)^2 + \frac{4}{3} T_* \frac{dT_*}{du} + \frac{80}{3} T_*^2, \quad A = \frac{8\pi R^2 h^3 a^2 E \alpha_l^2}{75(1-\nu)}.$$

Используя методику, изложенную в работе [1], учитывая условия (5) — (7), выражение (1) и уравнения (2), с помощью множителей Лагранжа приходим к задаче о минимизации следующего функционала:

$$\begin{aligned} M^* = A \int_0^{u_1} & \left\{ \frac{11}{35} \left(\frac{dT_*}{du}\right)^2 + \frac{4}{3} T_* \frac{dT_*}{du} + \frac{80}{3} T_*^2 + \lambda_1(u) \left[ \frac{1}{5} \frac{dT_*}{du} + \frac{4}{3} T_* + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1-\nu)(\sigma_*^+ - \sigma_0^+)}{2E\alpha_l} \left( \sin \varphi_{11}^+(u) + \frac{\sigma_*^+ + \sigma_0^+}{\sigma_*^+ - \sigma_0^+} \right) \right] + \lambda_2(u) \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{1}{5} \frac{dT_*}{du} + \frac{4}{3} T_* + T - \frac{T_0}{2} (1 + \sin \varphi_1^+(u)) \right] + \right. \\ & \left. + \lambda_3(u) \left[ \frac{1}{5} (4 + \text{Bi}) \frac{dT_*}{du} + 2 \left( 1 + \frac{2\text{Bi}}{3} \right) T_* + \text{Bi} T - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\text{Bi} T_{0c}}{2} (1 + \sin \varphi_1^c(u)) \right] + \lambda_4(u) \left( \frac{dT}{du} - \frac{2}{5} \frac{dT_*}{du} - T_* \right) + \right. \\ & \left. + \frac{T_0}{2} \sum_{i=0}^n \lambda_{i0} u^i (1 + \sin \varphi_1^+(u)) \right\} du. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь в соответствии с условиями (5) — (7) использованы представления

$$\begin{aligned} t^c &= \frac{T_{0c}}{2} (1 + \sin \varphi_1^c(u)), \quad t^+ = \frac{T_0}{2} (1 + \sin \varphi_1^+(u)), \\ \sigma^+ &= \frac{\sigma_*^+ - \sigma_0^+}{2} \left( \sin \varphi_{11}^+(u) + \frac{\sigma_*^+ + \sigma_0^+}{\sigma_*^+ - \sigma_0^+} \right); \end{aligned} \quad (10)$$

$\lambda_i(u)$ ,  $\lambda_{i0}$  — множители Лагранжа.

Из необходимого условия экстремума функционала (9) вытекают следующие уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_*}{du^2} - \frac{2800}{33} T_* + \frac{7}{22} \left[ \frac{d\lambda_1}{du} + \frac{d\lambda_2}{du} + (4 + \text{Bi}) \frac{d\lambda_3}{du} + \frac{35}{22} \frac{d\lambda_4}{du} - \right. \\ \left. - \frac{70}{33} (\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{35}{11} \left( 1 + \frac{2 \text{Bi}}{3} \right) \lambda_3 - \frac{175}{44} \lambda_4 = 0, \right. \\ \frac{d\lambda_4}{du} + \frac{2 \text{Bi}}{5} \lambda_3 + \frac{2}{5} \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \cos \varphi_{11}^+ = 0, \\ \left. \left( \lambda_2 - \sum_{i=0}^n \lambda_{i0} u^i \right) \cos \varphi_1^+ = 0, \quad \lambda_3 \cos \varphi_1^c = 0. \right. \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (11) вместе с условиями (5) — (7) и уравнениями (2) определяет искомые функции  $T$ ,  $T_*$ ,  $\varphi_{11}^+$ ,  $\varphi_1^c$ ,  $\varphi_{11}^+$  и множители Лагранжа  $\lambda_i(u)$ ,  $\lambda_{i0}$ .

Применим полученное выше решение экстремальной задачи для определения оптимального режима нагрева при следующих условиях. Пусть температура  $t^+$  внешней поверхности оболочки равна нулю в начальный момент времени  $u = 0$ , а при  $u = u_1 t^+$  достигает своего максимального значения  $T_0$ , т. е.

$$t^+(0) = 0, \quad t^+(u_1) = T_0, \quad \frac{dt^+(u_1)}{du} = 0, \quad 0 < t^+(u) < T_0 \quad \text{для} \quad 0 < u < u_1. \quad (12)$$

Необходимо найти такой оптимальный режим нагрева  $t^+$ , при котором температура  $t^c$  внешней среды не превышает заданного значения  $T_{0c}$ , т. е.

$$t^c \leq T_{0c}. \quad (13)$$

При определении искомого оптимального режима нагрева исходным является решение (11) экстремальной задачи без учета ограничений на температуры  $t^c$ ,  $t^+$  и напряжения  $\sigma^+$ . В этом случае в системе уравнений Эйлера (11) необходимо положить

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sum_{i=0}^n \lambda_{i0} u^i, \quad \lambda_3 = 0. \quad (14)$$

Решая систему уравнений (11) и учитывая выражения (1), уравнения (2) и формулу (4), находим

$$T = T_0 \left[ C_1 q_1 e^{ku} + C_2 q_2 e^{-ku} + \frac{\lambda_{*1}}{2} u^2 + \left( \frac{2}{5} \lambda_{*1} + C_{*1} \right) u + C_3 \right], \quad (15)$$

$$T_* = T_0 (C_1 e^{ku} + C_2 e^{-ku} + \lambda_{*1} u + C_{*1}),$$

$$\begin{aligned} t^c = T_0 \left[ C_1 P_1 e^{ku} + C_2 P_2 e^{-ku} + \frac{\lambda_{*1}}{2} u^2 + \left( \frac{2(15 + 13 \text{Bi})}{15 \text{Bi}} \lambda_{*1} + C_{*1} \right) u + \right. \\ \left. + \frac{4 + \text{Bi}}{5 \text{Bi}} \lambda_{*1} + \frac{2(3 + 2 \text{Bi})}{3 \text{Bi}} C_{*1} + C_3 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} t^+ = T_0 \left[ C_1 q_3 e^{ku} + C_2 q_4 e^{-ku} + \frac{\lambda_{*1}}{2} u^2 + \left( \frac{26}{15} \lambda_{*1} + C_{*1} \right) u + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{*1}}{5} + \frac{4}{3} C_{*1} + C_3 \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sigma^+ = - \frac{E \alpha T_0}{1 - \nu} \left( C_1 q_5 e^{ku} + C_2 q_6 e^{-ku} + \frac{4 \lambda_{*1}}{3} u + \frac{\lambda_{*1}}{5} + \frac{4}{3} C_{*1} \right), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} q_{1,2} = \frac{1}{5} \left( 2 \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{33}{7}} \right); \quad P_{1,2} = q_{1,2} \pm \frac{(4 + \text{Bi}) k}{5 \text{Bi}} + \frac{2(3 + 2 \text{Bi})}{3 \text{Bi}}; \\ q_{3,4} = \frac{1}{5} \left( \frac{26}{3} \pm \frac{593}{4 \sqrt{231}} \right); \quad q_{5,6} = 4 \left( \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{7}{33}} \right); \quad k^2 = \frac{2800}{33}; \end{aligned}$$

$C_1, C_{*1}, \lambda_{*1}$  — произвольные постоянные, которые определяются из условий

$$T(0) = T_*(0) = 0, \quad \frac{dT_*(0)}{du} = 0, \quad t^+(u_0) = T_0, \quad \frac{dt^+(u_0)}{du} = 0. \quad (19)$$

Здесь  $u_0$  ( $0 < u_0 < u_1$ ) — некоторое фиксированное значение  $u$ .

Если при заданном параметре  $u_0$  температура  $t^+$  для  $0 < u < u_0$  меньше своего допустимого значения  $T_0$ , а при  $u = u_0$   $t^+ = T_0$ , температура  $t^c$  и напряжения  $\sigma^+$  в этом интервале не превышают своих допустимых значений, то выражения (16), (17) для  $t^c, t^+$  являются решением задачи. При этом продолжительность нагрева  $u_1 = u_0$ .

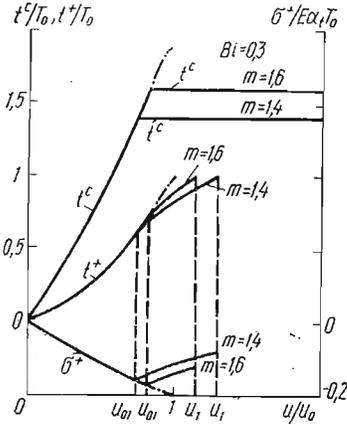


Рис. 1

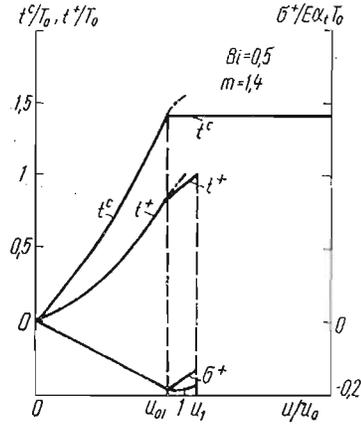


Рис. 2

Если при некотором значении  $u = u_{01}$  ( $u_{01} < u_0$ ) температура  $t^c$  достигает своего допустимого значения  $T_{0c}$ , а при  $u > u_{01}$   $t^c > T_{0c}$ , при этом для  $0 \leq u \leq u_{01}$   $t^+ < T_0$  и напряжения  $\sigma^+$  меньше своих допустимых значений, то в этом случае из анализа системы уравнений (11) и представлений (10) следует, что, начиная с момента  $u = u_{01}$ ,  $t^c = T_{0c}$ , а выражения для  $T$  и  $T_*$  определяются из системы уравнений (2).

Определив из системы уравнений (2) при  $t^c = T_{0c}$  выражения для  $T$  и  $T_*$ , по формулам (1) и (4) можно последовательно найти  $t$  и  $\sigma$ . При этом  $t^+$  запишется в виде

$$t^+ = T_{0c} \left( 1 + P_{1*} C_{11} e^{b_{1.1} u} + P_{2*} C_{22} e^{b_{2.2} u} \right), \quad (20)$$

где

$$b_{1.2} = \pm \frac{1}{2n_2} \left( \sqrt{\left( n_1 + \frac{2}{5} \right)^2 - 4n_2} \mp n_1 \mp \frac{2}{5} \right);$$

$$n_1 = \frac{2}{Bi} \left( 1 + \frac{2Bi}{3} \right); \quad n_2 = \frac{1}{5Bi} (4 + Bi);$$

$$P_{1,2*} = \frac{4}{3} - n_1 + b_{1.2} \left( \frac{1}{5} - n_2 \right).$$

Произвольные постоянные  $C_{11}, C_{22}$  определяются из условий непрерывности температурного поля (1) при  $u = u_{01}$ .

Пусть для  $u > u_{01}$   $t^+$  при  $u = u_{02}$  достигает значения  $T_0$ , а напряжения  $\sigma^+$  для  $u_{01} \leq u \leq u_{02}$  не превышают допустимых значений. Тогда  $u = u_{02}$  и представляет собой продолжительность искомого режима нагрева.

При числовом анализе полученного оптимального решения принималось  $u_0 = 10$ ;  $v = 0,3$ ;  $m = \frac{T_{0c}}{T_0} = 1,4; 1,6$ ;  $Bi = 0,3; 0,5$ .

На рис. 1, 2 показано изменение во времени температуры  $t^c$  внешней среды, температуры  $t^+$  и напряжений  $\sigma^+$  на внешней поверхности оболочки

для оптимального режима нагрева без учета ограничений (штрихпунктирные линии) и с учетом ограничений (сплошные) на температуру внешней среды. Из приведенных графиков видно, что при заданной максимальной температуре  $T_0$  с уменьшением величины допустимой температуры  $T_{0c}$  внешней среды продолжительность нагрева  $\mu_1$  увеличивается. С увеличением коэффициента теплоотдачи продолжительность нагрева уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Будз С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки. — Прикл. механика, 1974, № 10, с. 14—20.
2. Бурак Я. И., Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г., Ирза Е. М. Оптимизация режимов нагрева сферической оболочки. — В кн.: Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Канев, 1974, с. 44—50.
3. Будз С. Ф., Мирончук Ю. Г. Определение оптимальных по напряжениям режимов нагрева сферической оболочки. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 107—110.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961. 211 с.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
10.IX 1975 г.

УДК 539.377

Л. П. Беседина, Я. И. Бурак, Н. И. Веремчук

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Решения экстремальных задач термоупругости применительно к условиям локальной термообработки цилиндрических оболочек, основанные на минимизации функционала энергии упругой деформации, при заданных ограничениях на искомые функции в фиксированных сечениях рассмотрены в работах [1, 3]. В настоящей работе для свободной на краях конечной и бесконечной цилиндрических оболочек проведены исследования решений экстремальной задачи термоупругости для функционала энергии упругой деформации оболочки в зависимости от выбора интегрального вида ограничений на температурное поле применительно к конкретным условиям локального нагрева.

**Постановка и решение экстремальной задачи.** Рассмотрим задачу нахождения оптимальных (вызывающих минимальные температурные напряжения) постоянных по толщине осесимметричных температурных полей  $T(x)$  в свободной на краях цилиндрической оболочке радиуса  $R$ , толщины  $2h$  и длины  $2L$ . Энергию упругой деформации оболочки представим функционалом

$$K[\omega_0, T] = \frac{\pi E h R^2}{2a} \int_{-l}^l [(\omega_0'')^2 + 4(\omega_0 - \alpha T)^2] dx, \quad (1)$$

заданным на множестве функций  $\omega_0(x) = \frac{w(x)}{R}$ ,  $T(x)$ , которые связаны между собой разрешающим уравнением [4]

$$\omega_0^{IV}(x) + 4[\omega_0(x) - \alpha T(x)] = 0. \quad (2)$$

Здесь  $w(x)$  — функция прогибов;  $x = \frac{az}{R}$ ;  $l = \frac{aL}{R}$ ;  $z$  — осевая координата;  $E$  — модуль упругости;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $\alpha^4 = 0,75(1 - \nu^2)R^2h^{-2}$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона; штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ .