они имеют минимум. Для рассматриваемых значений физических параметров резонансные прогибы изотропной оболочки [5] меньше, чем для трансверсально-изотропной и ортотропной соответственно.

Поскольку рассеяние энергии для тонких оболочек обусловлено необратимыми тепловыми потоками в основном через их поверхности, то, как видно из рис. 4, увеличение теплоотдачи приводит к уменьшению затухания колебательного процесса [2]. Следовательно, подбором материала оболочки и ее толщины можно регулировать величину резонансных амплитуд.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* К теории термоупругого внутреннего трения в твердых телах.— В кн.: Внутреннее трение в металлах и сплавах. М., 1966, с. 216—221.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Квазистатическая задача взаимосвязанной термоупругости.— Прикл. механика, 1969, 5, № 1, с. 44—51.
3. *Швец Р. Н., Лунь Е. И.* Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига.— Прикл. механика, 1971, 7, № 10, с. 121—125.
4. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Термоупругие колебания ортотропных цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1973, 11, № 11, с. 15—22.
5. *McQuillen E. J., Brull M. A.* Dynamic thermoelastic Response of Cylindrical shells.— Trans. ASME. Ser. E, 1970, 37, N 3, p. 661—670.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.IX 1975 г.

УДК 539.373 : 621.643.411

Б. Л. Пелех, В. К. Ганулич

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЗАДАННЫМ ТЕНЗОРОМ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Пусть в анизотропном теле, которое занимает объем V, ограниченный поверхностью $S = S_1 + S_2$, заданы помимо объемных сил $\overline{X}$ компоненты e_{ij} тензора несовместных деформаций [2, 3, 6] как функции координат x_j. Рассмотрим функционал

$$J = \int\limits_V \left\{ Э - \sigma_{ij} \left[(e_{ij} - e^0_{ij}) - \frac{1}{2} (\nabla_j U_i + \nabla_i U_j) \right] - X_i U_i \right\} dV -$$

$$- \int\limits_{S_1} \overline{P}_i U_i dS - \int\limits_{S_2} (U_j - \overline{U}_j)\, \sigma_{ij} n_i dS, \qquad (1)$$

где

$$Э = \frac{1}{2} C_{ijkl} (e_{ij} - e^0_{ij}) (e_{kl} - e^0_{kl}) \qquad (2)$$

— упругий потенциал анизотропного тела; e_{ij} — компоненты тензора совместных деформаций; C_{ijkl} — тензор упругих характеристик; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $\nabla_j = \partial/\partial x_j$; U_i — компоненты вектора смещения; $\overline{U}_i$ — граничные их значения на части поверхности S_2; P_i — известные на S_1 компоненты поверхностных усилий; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Относительно функционала (1) справедлива такая теорема [1].

Теорема. *Вариационное уравнение $\delta J = 0$ содержит в качестве уравнений Эйлера полную систему уравнений теории упругости для тел с несовместными деформациями, а в качестве естественных (эйлеровых) граничных условий — смешанные краевые условия на S_1 и S_2.*

В самом деле, варьируя функционал (1) по всем функциональным аргументам, независимость которых предполагается, учитывая свойство коммутативности $\delta\nabla_\alpha = \nabla_\alpha\delta$, используя затем теорему Гаусса — Остроградского и группируя члены при одноименных вариациях, получаем

$$\delta J = \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial Э}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\delta e_{ij} - \left[(e_{ij} - e^0_{ij}) - \frac{1}{2}(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i)\right]\delta\sigma_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta\nabla_i U_j + \delta\nabla_j U_i) - X_i\delta U_i\right\} dV - \int\limits_{S_1} \overline{P}_i \delta U_i dS -$$

$$- \int\limits_{S_2} (U_j - \overline{U}_j)\,\delta\sigma_{ij} n_i dS - \int\limits_{S_2} \sigma_{ij} n_i \delta U_j dS. \qquad (3)$$

Приравнивая равенство (3) нулю, в силу независимости вариаций получаем соотношения закона Гука, соотношения типа Коши, уравнения равновесия, а также статические и геометрические условия на частях S_1 и S_2 поверхности S.

Таким образом, из всех возможных напряженно-деформированных состояний тела истинным будет то, при котором функционал (1) имеет стационарное значение. Сформулированная экстремальная задача соответствует наиболее общему вариационному принципу теории упругости, распространенному на случай наличия в теле несовместных деформаций. Этот принцип может быть использован для построения замкнутой системы уравнений теории податливых на сдвиг слоистых анизотропных оболочек с заданным тензором несовместных деформаций.

Рассмотрим выполненную из анизотропного материала оболочку толщины $2h$, срединная поверхность которой отнесена к ортогональным координатам α_1, α_2; координату вдоль нормали к срединной поверхности обозначим через α_3. Разложив компоненты U_i вектора смещений в ряд по α_3 в окрестности произвольной точки срединной поверхности $\alpha_3 = 0$ и ограничившись в этих разложениях первыми двумя членами с учетом предпосылок о тонкостенности оболочки, найдем

$$U_j = u_j + \alpha_3\gamma_j(1 - \delta_{3j}), \qquad (4)$$

где u_j — смещения точки срединной поверхности; γ_j — углы поворота нормали $\vec{n}$ к поверхности S; δ_{kj} — символ Кронекера. Подставляя формулу (4) в (1) и интегрируя по α_3, получаем основной функционал линейной теории типа Тимошенко [7] для упругих слоистых анизотропных оболочек с несовместными деформациями e^0_{ij}:

$$J_0 = \int\limits_S \left\{Э_0 - T_{\alpha\beta}\left[(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha - \nabla_\alpha u_\beta - 2b_{\alpha\beta}u_3)\right] - \right.$$

$$- N_\alpha\left[(\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon^0_{\alpha 3}) - (\gamma_\alpha + b_{\alpha\beta}u_\beta + \nabla_\alpha u_3)\right] -$$

$$\left. - M_{\alpha\beta}\left[(\varkappa_{\alpha\beta} - \varkappa^0_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\gamma_\beta + \nabla_\beta\gamma_\alpha)\right] - (g_\alpha u_\alpha + m_\alpha\gamma_\alpha + q_3 u_3)\right\} dS -$$

$$- \int\limits_{C_1} (\overline{T}_\alpha u_\alpha + \overline{M}_\alpha\gamma_\alpha + \overline{N}_3 u_3)\, dC - \int\limits_{C_2} [T_{\alpha\beta}(u_\alpha - \overline{u}_\alpha) + M_{\alpha\beta}(\gamma_\alpha - \overline{\gamma}_\alpha) +$$

$$+ N_\alpha(u_3 - \overline{u}_3)]\, n_\beta dC. \qquad (5)$$

Здесь $T_{\alpha\beta}$, N_α, $M_{\alpha\beta}$ — компоненты продольных и поперечных сил и моментов; q_α, m_α — компоненты внешних сил и моментов; $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$, $\varkappa^0_{\alpha\beta}$ — приведенные к срединной поверхности компоненты тензоров совместной и несовместной деформаций; $\overline{T}_\alpha$, $\overline{N}_3$, $\overline{M}_\alpha$ и $\overline{U}_\alpha$, $\overline{\gamma}_\alpha$ — заданные на C_1 и C_2 компоненты векторов обобщенных усилий и перемещений; $b_{\alpha\beta}$ — тензор второй квадратичной формы срединной поверхности;

$$\mathcal{E}_0 = \int_{-h}^{h} \mathcal{E}(1 + k_1\alpha_3)(1 + k_2\alpha_3)\,d\alpha_3 \tag{6}$$

— упругий потенциал оболочки; k_1 и k_2 — главные кривизны ее срединной поверхности.

Относительно функционала J_0 справедлива аналогичная сформулированной выше для J теорема.

Теорема. *Уравнение* $\delta J_0 = 0$ *содержит в качестве уравнений Эйлера полную систему уравнений теории податливых на сдвиг слоистых анизотропных оболочек с остаточными несовместными деформациями, а в качестве естественных (эйлеровых) граничных условий — смешанные условия на краю оболочки.*

Варьируя J_0 по всем предполагаемым независимым функциональным аргументам, получаем а) уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha T_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}N_\alpha + q_\beta = 0, \quad \nabla_\alpha M_{\alpha\beta} - N_\beta + m_\beta = 0,\\ \nabla_\alpha N_\alpha + b_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} + q_3 = 0;\end{gathered} \tag{7}$$

б) соотношения типа Коши

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - 2b_{\alpha\beta}u_3) + \varepsilon^0_{\alpha\beta}, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\gamma_\beta + \nabla_\beta\gamma_\alpha) + \varkappa^0_{\alpha\beta},\\ \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha + b_{\alpha\beta}u_\beta + \nabla_\alpha u_3 + \varepsilon^0_{\alpha 3};\end{gathered} \tag{8}$$

в) соотношения закона Гука

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}, \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \varkappa_{\alpha\beta}}, \quad N_\alpha = \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}; \tag{9}$$

г) статические и геометрические условия

$$T_{\alpha\beta}n_\alpha = \overline{T}_\beta, \ M_{\alpha\beta}n_\alpha = \overline{M}_\beta, \ N_\alpha n_\alpha = \overline{N} \text{ на } C_1, \ u_\alpha = \overline{u}_\alpha, \ \gamma_\alpha = \overline{\gamma}_\alpha \text{ на } C_2. \tag{10}$$

Недостающие соотношения неразрывности деформаций можно получить из аналога принципа Кастилиано [5], который вытекает из сформулированной теоремы. Опуская выкладки, записываем

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}\mu_{\gamma\delta} + b_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}\eta_\beta = 0, \quad \nabla_\alpha c_{\alpha\beta}\eta_\beta - b_{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}\mu_{\gamma\delta} = 0,\\ \nabla_\alpha c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon^0_{\gamma\delta}) - c_{\alpha\beta}\eta_\beta = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered}\mu_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta} - \varkappa^0_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}[\nabla_\alpha(\varepsilon_{\beta 3} - \varepsilon^0_{\beta 3}) + \nabla_\beta(\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon^0_{\alpha 3})],\\ \eta_\beta = \zeta_\beta + c_{\alpha\gamma}b_{\beta\gamma}(\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon^0_{\alpha 3}),\end{gathered} \tag{12}$$

причем $c_{\alpha\beta}$ — компоненты дискриминантного тензора.

Сформулированная вариационная теорема соответствует наиболее общему вариационному принципу линейной теории податливых на сдвиг слоистых анизотропных оболочек с остаточными несовместными деформациями. Из этой теоремы легко вывести другие вариационные принципы, например аналоги принципов Лагранжа, Райсснера и так называемый принцип граничных условий [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелех Б. Л.* Некоторые вопросы теории и расчета анизотропных оболочек и пластин с низкой сдвиговой жесткостью.— Механика полимеров, 1970, № 4, с. 693—714.
2. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А.* К определению напряженного состояния тонких оболочек с учетом деформаций, обусловленных физико-химическими процессами.— ФХММ, 1968, № 2, с. 218—224.
3. *Подстригач Я. С., Пелех Б. Л., Ганулич В. К.* Расчет податливых на сдвиг ортотропных оболочек с остаточными напряжениями.— Прикл. механика, 1973, 9, № 8, с. 22—30.

4. *Райсснер Э.* О некоторых вариационных принципах теории упругости.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., 1961, с. 358—364.
5. *Шереметьев М. П., Пелех Б. Л.* К вопросу о вариационных принципах в теории оболочек.— В кн.: Теоретическая и прикладная математика. Львов, 1963, с. 68—94.
6. *Nowacki W.* Thermoelastic Distorsion Problems.— Bull. d. L'acad. pol. d. sci. s. d. sci. techn., 1966, **14**, N 3, p. 342—349.
7. *Timochenko S. P.* On the corrections of shear of the differential equations for transwerse vibrations of Prismate Bars.— Phil. mag. Ser. 6, 1921, **41**, p. 744—752.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 15.XII 1975 г.

УДК 539.377

Я. И. Бурак, С. Ф. Будз

ОПТИМИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Решение рассматриваемой задачи при отсутствии ограничений на изменение температуры внешней среды получено в работах [1—3]. В настоящей работе исследуется тонкостенная теплоизолированная на внутренней поверхности замкнутая сферическая оболочка радиуса R и постоянной толщины $2h$. На внешней поверхности оболочки осуществляется конвективный теплообмен со средой по закону Ньютона. Начальная температура оболочки постоянна и равна температуре внешней среды.

Распределение по толщине оболочки нестационарного температурного поля в произвольный момент времени представим кубическим законом [1]

$$t(\gamma,\ u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{1}{3}\right)\frac{dT}{du} + \frac{\gamma}{2h}\left(\frac{\gamma^2}{3h^2} - \frac{1}{5}\right)\frac{dT_*}{du} + \frac{\gamma}{h}T_* + T, \tag{1}$$

где γ — координата по толщине оболочки, отсчитываемая от срединной поверхности; $u = \frac{\tau}{a^2h^2}$; a^{-2} — коэффициент температуропроводности; τ — время; T, T_* — усредненная температура и температурный момент, которые должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{5}(4 + \mathrm{Bi})\frac{dT_*}{du} + 2\left(1 + \frac{2\mathrm{Bi}}{3}\right)T_* + \mathrm{Bi}\,T = \mathrm{Bi}\,t^c,\\ \frac{dT}{du} - \frac{2}{5}\frac{dT_*}{du} - T_* = 0.\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь t^c — температура внешней среды; Bi — безразмерный коэффициент Био. При этом температура отсчитывается от своего начального значения.

Учитывая нулевые начальные условия для функции $t(\gamma,\ u)$, на основании закона (1) получаем начальные условия для T и T_*:

$$T(0) = 0,\quad \frac{dT(0)}{du} = 0,\quad T_*(0) = 0,\quad \frac{dT_*(0)}{du} = 0. \tag{3}$$

При отсутствии внешнего силового нагружения напряженное состояние оболочки характеризуется меридиональными σ_s и кольцевыми σ_β напряжениями, которые определяются по формулам [4]

$$\sigma_s = \sigma_\beta \equiv \sigma = \frac{E\alpha_t}{1 - \nu}(T - t), \tag{4}$$

где α_t — коэффициент линейного температурного расширения; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим задачу об определении оптимального по напряжениям режима нагрева по толщине сферической оболочки при следующих ограничениях на изменение температуры t^c внешней среды, t^+ внешней поверхности оболочки и напряжений σ^+ на этой поверхности: