3. *Кіт Г. С.* Деякі питання термоміцності тіл с тріщинами.— Вісн. АН УРСР, 1972, № 4, с. 22—28.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Осесимметричная задача термоупругости для бесконечного тела, ослабленного двумя параллельными круглыми щелями.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1972, вып. 12, с. 101—108.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.XII 1975 г.

УДК 536.21

Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха

УСЛОВИЯ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОДКРЕПЛЕННОМ КРАЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

В ряде приложений, например при определении напряжённо-деформированного состояния многослойных оболочек, достаточно знать усредненные по толщине $2\delta_i$ i-го слоя характеристики температурного поля t_i этого слоя — среднее значение температуры T_i и температурный аналог изгибающего момента θ_i:

$$T_i = \frac{1}{2\delta_i}\int_{-\delta_i}^{\delta_i} t_i d\gamma_i, \quad \theta_i = \frac{3}{2\delta_i^2}\int_{-\delta_i}^{\delta_i} t_i\gamma_i d\gamma_i. \tag{1}$$

В работах [1, 2, 4] получены дифференциальные уравнения для T_i и θ_i; при этом соответствующие краевые условия сформулированы для случая, когда на торцевых поверхностях каждого из слоев теплообмен с окружающей средой осуществляется согласно закону Ньютона. В настоящей работе выводятся условия теплообмена m-слойной оболочки с подкрепляющим ее край криволинейным ортотропным стержнем произвольного поперечного сечения.

Рассмотрим m-слойную оболочку, край которой подкреплен ортотропным стержнем произвольного поперечного сечения. Ось стержня предполагается гладкой плоской кривой, а поверхность контакта — линейчатой развертывающейся поверхностью. Между стержнем и i-м слоем оболочки (по поверхности S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$) осуществляется идеальный тепловой контакт, а на части боковой поверхности стержня S_{m+1}, не контактирующей с оболочкой, и на торцевых его поверхностях S_{m+2} и S_{m+3} происходит теплообмен с омывающей средой по закону Ньютона. Координатные оси Ox и Oy совместим с главными центральными осями поперечного сечения и будем считать их совпадающими с направлениями ортотропии.

В качестве исходного примем следующее уравнение нестационарной трехмерной задачи теплопроводности:

$$\lambda_x\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + k\left(\lambda_x\frac{\partial t}{\partial x}\cos\varphi + \lambda_y\frac{\partial t}{\partial y}\sin\varphi\right) + \\ + \lambda_s\frac{\partial^2 t}{\partial s^2} - c\frac{\partial t}{\partial \tau} + q = 0. \tag{2}$$

Условия теплового контакта и краевые условия имеют вид

$$-\left[\lambda_x n_x\frac{\partial t}{\partial x} + \lambda_y n_y\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{S_i} = \frac{\lambda_\alpha^{(i)} n_\alpha}{A}\frac{\partial t_i}{\partial \alpha} + \frac{\lambda_\beta^{(i)} n_\beta}{B}\frac{\partial t_i}{\partial \beta}, \tag{3}$$

$$[t]_{S_i} = t_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

$$\left[\lambda_x n_x\frac{\partial t}{\partial x} + \lambda_y n_y\frac{\partial t}{\partial y} + \varepsilon_{m+1}(t - t_{m+1}^{(c)})\right]_{S_{m+1}} = 0, \tag{4}$$

$$\left[\lambda_s\frac{\partial t}{\partial s} + \varepsilon_r(t - t_r^{(c)})\right]_{S_r} = 0 \quad (r = m+2,\ m+3), \tag{5}$$

$$[t]_{\tau=0} = t_0(x, y, s). \tag{6}$$

В соотношениях (2) — (5) обозначено: $t(x, y, s, \tau)$ — температура стержня; s — осевая координата; τ — время; λ_x, λ_y, λ_s — коэффициенты теплопроводности материала стержня; ε_r — коэффициент теплоотдачи с поверхности S_r $(r = m+1,\ m+2,\ m+3)$; $t_r^{(c)}$ — температура среды, омывающей эту поверхность; q — плотность тепловых источников; n_x, n_y — компоненты единичного вектора внешней к контуру поперечного сечения стержня нормали; φ — угол, образованный плоскостью оси стержня с осью Ox; α, β и A, B — криволинейные координаты и коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки; $\lambda_\alpha^{(i)}$, $\lambda_\beta^{(i)}$ — коэффициенты теплопроводности материала i-го ее слоя; n_α, n_β — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности оболочки, контактирующей со стержнем.

Введем следующие усредненные по области поперечного сечения стержня D характеристики его температурного поля:

$$T = \frac{1}{F}\iint\limits_D t dF, \quad \theta_x = \frac{\delta_x}{I_{xx}}\iint\limits_D ty dF, \quad \theta_y = \frac{\delta_y}{I_{yy}}\iint\limits_D tx dF, \tag{7}$$

где F — площадь поперечного сечения; I_{xx}, I_{yy} — осевые моменты инерции области D; δ_x (δ_y) — расстояние от оси Ox (Oy) до наиболее удаленной от нее точки области D.

Умножим уравнение (2) соответственно на 1, x, y и проинтегрируем его по области D, используя формулу Грина [3], первые из условий (3) и формулы (1) и (7). В полученные соотношения вместо $t(x, y, s, \tau)$ подставим выражение

$$t = a_{00}(s, \tau) + a_{10}(s, \tau)\, x + a_{01}(s, \tau)\, y, \tag{8}$$

исключив предварительно из формул (7) и (8) величины a_{ij}, в результате получим следующую систему дифференциальных уравнений на интегральные характеристики температурного поля стержня:

$$\begin{gathered} p_*^2 T - E_{00}T - E_{01}\theta_x - E_{10}\theta_y - \frac{\varkappa_y}{R_y}\theta_x - \frac{\varkappa_x}{R_x}\theta_y + B_{00} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial T_i}{\partial n_i^*}, \\ a_x p_*^2\theta_x - E_{01}T - E_{02}\theta_x - E_{11}\theta_y - \frac{1}{R_y}\theta_x + B_{01} = \\ = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y_i^0}{\delta_x}\frac{\partial T_i}{\partial n_i^*} + \frac{1}{3}\frac{\delta_i}{\delta_x}\frac{\partial\theta_i}{\partial n_i^*}\cos\varphi\right), \\ a_y p_*^2\theta_y - E_{10}T - E_{11}\theta_x - E_{20}\theta_y - \frac{1}{R_x}\theta_y + B_{10} = \\ = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i^0}{\delta_y}\frac{\partial T_i}{\partial n_i^*} - \frac{1}{3}\frac{\delta_i}{\delta_y}\frac{\partial\theta_i}{\partial n_i^*}\sin\varphi\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь введены такие обозначения:

$$p_*^2 = \Lambda_s\frac{\partial^2}{\partial s^2} - C\frac{\partial}{\partial\tau}; \quad \frac{\partial}{\partial n_i^*} = \Lambda_\alpha^{(i)}\frac{n_\alpha}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \Lambda_\beta^{(i)}\frac{n_\beta}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}; \tag{10}$$

$$B_{ij} = \int\limits_{(L)}\varepsilon_{m+1}t_{m+1}^{(c)}\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dl + \iint\limits_D q\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dF;$$

$$E_{ij} = \int\limits_{(L)}\varepsilon_{m+1}\left(\frac{x}{\delta_y}\right)^i\left(\frac{y}{\delta_x}\right)^j dl; \quad R_x = \frac{\delta_y^2}{\Lambda_x}; \quad R_y = \frac{\delta_x^2}{\Lambda_y};$$

$$\Lambda_x = \lambda_x F; \quad \Lambda_y = \lambda_y F; \quad \Lambda_s = \lambda_s F; \quad C = cF;$$

$$a_x = \left(\frac{i_{xx}}{\delta_x}\right)^2; \quad a_y = \left(\frac{i_{yy}}{\delta_y}\right)^2; \quad \Lambda_\alpha^{(i)} = \lambda_\alpha^{(i)} 2\delta_i; \quad \Lambda_\beta^{(i)} = \lambda_\beta^{(i)} 2\delta_i;$$

$$\varkappa_x = \delta_y k \cos\varphi; \quad \varkappa_y = \delta_x k \sin\varphi;$$

L — линия пересечения поверхности S_{m+1} плоскостью поперечного сечения стержня; i_{xx}, i_{yy} — радиусы инерции области D относительно соответствующих осей; x_i^0, y_i^0 — координаты центра тяжести отрезка Γ_i, образуемого пересечением поверхности S_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) плоскостью поперечного сечения.

Интегрирование по Γ_i второй группы условий (3) с учетом формул (1), (7) и (8) приводит к следующим соотношениям:

$$T + \frac{x_i^0}{\delta_y}\theta_y + \frac{y_i^0}{\delta_x}\theta_x = T_i, \quad \frac{\delta_i}{\delta_x}\theta_x \cos\varphi - \frac{\delta_i}{\delta_y}\theta_y \sin\varphi = \theta_i \qquad (11)$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Краевые условия на T, θ_x и θ_y получаем непосредственным интегрированием условий (5) и (6): на S_r

$$\Lambda_s \frac{\partial T}{\partial s} + E_r\left(T - \frac{1}{F}\iint_D t_r^{(c)} dF\right) = 0,$$

$$\Lambda_s \frac{\partial \theta_x}{\partial s} + E_r\left(\theta_x - \frac{\delta_x}{I_{xx}}\iint_D t_r^{(c)} y dF\right) = 0, \qquad (12)$$

$$\Lambda_s \frac{\partial \theta_y}{\partial s} + E_r\left(\theta_y - \frac{\delta_y}{I_{yy}}\iint_D t_r^{(c)} x dF\right) = 0,$$

$$E_r = \varepsilon_r F \quad (r = m + 2, \ m + 3);$$

при $\tau = 0$

$$T = \frac{1}{F}\iint_D t_0 dF, \quad \theta_x = \frac{\delta_x}{I_{xx}}\iint_D t_0 y dF, \quad \theta_y = \frac{\delta_y}{I_{yy}}\iint_D t_0 x dF. \qquad (13)$$

Таким образом, для определения температурного поля m-слойной оболочки с подкрепленным краем необходимо решить систему дифференциальных уравнений на T_i и θ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) [1, 4] совместно с системой уравнений (9) на T, θ_x и θ_y при условиях сопряжения (11) и краевых условиях (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Береговой С. П., Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности многослойных оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 105—110.
2. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Уравнения поля температур для трехслойных оболочек.— Изв. АН СССР. Техника, 1964, 6, № 2, с. 88—92.
3. *Смирнов И. В.* Курс высшей математики. Т. 2. Физматгиз, М., 1954. 628 с.
4. *Чернуха Ю. А.* Задача теплопроводности для облучаемых многослойных оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 104—109.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 15.V 1975 г.

УДК 539.3

В. А. Осадчук, Е. И. Труш, Е. М. Федюк

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПО ТОЛЩИНЕ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОЙ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ

Использование в инженерной практике тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из новых композитных материалов (армированных пластмасс и др.) требует разработки методики расчета на прочность этих