УДК 534. 1:531. 221. 3

Б. И. Гайвась

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ СТУПЕНЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В работе предложен способ получения характеристического ряда для задачи о поперечных колебаниях сжатого (растянутого) упругого стержня с кусочно-постоянным распределением жесткости и массы:

$$FI(x) = EI_0\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma_0 (x - a_i)\right], \quad M(x) = M_0\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sigma_0 (x - a_i)\right]. \tag{1}$$

Здесь $\sigma_0 (x - a_i)$ — единичная функция Хевисайда; α_i, β_i — параметры скачков; EI_0, M_0 — соответственно значение жесткости и масса при $0 < x < a_1$; m — число ступенек.

Исследование малых колебаний такого стержня сводится к краевым задачам вида

$$[f(x)x'']'' + py'' - g(x)\omega^2 y = 0, \tag{2}$$

$$[f(x)y'']' + \varkappa_0 y = 0, \quad f(x)y'' - \psi_0 y' = 0, \quad x = 0; \quad [f(x)y'']^1 - \varkappa_1 y = 0, \quad f(x)y'' + \psi_1 y' = 0, \quad x = 1, \tag{3}$$

где p, ω — соответственно безразмерный параметр нагрузки и частота: ψ_i, $\varkappa_i$ — коэффициенты упругого закрепления,

$$f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma_0 (x - a_i),$$

$$g(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sigma_0 (x - a_i).$$

Решение рассматриваемой задачи представляем в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \omega^{2n}. \tag{4}$$

Поступая аналогично [1]*, для определения неизвестных функций $\{y_n(x)\}_0^\infty$ получаем следующую рекуррентную систему:

$$[f(x)y_0''] + py_0'' = 0; \tag{5}$$

$$f(x)y_0'' + \psi_0 y_0' = 0, \quad [f(x)y_0'']' - \varkappa_0 y_0 = 0, \quad x = 0; \tag{6}$$

$$[f(x)y_n'']'' + py_n'' = g(x)\, y_{n-1}; \tag{7}$$

$$[f(x)y_n'']' = f(x)y_n'' = y_n' = y_n = 0, \quad x = 0. \tag{8}$$

К уравнениям (5), (7) можно применить сплайн-преобразование переменного x в виде [3] *

$$x = u + \sum_{i=1}^{m} (u - b_i)\gamma_i \sigma_0 (u - b_i), \tag{9}$$

где $b_1 = a_1$; $b_i = b_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\left(1 + \sum_{i=1}^{i-1} \gamma_i\right)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; γ_i — некоторые параметры, определяемые далее.

Дважды проинтегрировав уравнение (5), получим

$$y_0'' + p[f(x)]^{-1} y_0 = (C_1 x + C_2)[f(x)]^{-1}. \tag{10}$$

---

* Эта работа посвящена построению характеристического определителя для случая незагруженного стержня.

Переходя к новому переменному u и выбирая

$$\gamma_i = \left(1 + \sum_{j=1}^{i} \alpha_i\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_i\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

преобразуем уравнение (10) к виду

$$y''_{0u} + py_{0u} = C_1\left[u + \sum_{i=1}^{m} (u - b_i)\gamma_i\sigma_0(u - b_i)\right] +$$
$$+ C_2 + y'_{0x}(a_i)\sum_{i=1}^{m} \gamma_i\sigma_1(u - b_i), \tag{12}$$

где $\sigma_1 = \sigma'_0 \mid u \mid$ — функция Дирака; C_i — постоянные интегрирования. Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (6), имеет вид

$$y_0(u) = C_1\Phi_1^0(u) + C_2\Phi_2^0(u), \tag{13}$$

где

$$\Phi_r^0 = \varphi_{r0} + \sum_{i=1}^{m} \Phi_{r0i}\sigma_0(u - b_i), \tag{14}$$

причем

$$\varphi_{r0} = a_{00}^r + a_{10}^r u + \varphi_{00}^r \cos\sqrt{p}u + g_{00}^r \frac{\sin\sqrt{p}u}{\sqrt{p}},$$

$$\Phi_{r0i} = A_{00i}^r + A_{10i}^r(u - b_i) + F_{00i}^r\cos\sqrt{p}u + G_{00i}^r\frac{\sin\sqrt{p}(u - b_i)}{\sqrt{p}},$$

$$A_{00i}^1 = 0,\quad A_{10i}^1 = \frac{\gamma_i}{p},\quad F_{00i}^1 = 0,\quad G_{00i}^1 = \gamma_i\left(L_i^1 - \frac{1}{p}\right),$$

$$a_{00}^2 = \frac{1}{p},\quad a_{10}^2 = 0,\quad \varphi_{00}^2 = y_{02} - \frac{1}{p},\quad g_{00}^2 = y'_{02},$$

$$A_{00i}^2 = 0,\quad A_{10i}^2 = F_{00i}^2 = 0,\quad G_{00i}^2 = L_i^2\gamma_i, \tag{15}$$

$$L_i^r = \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)[\Phi_r^0(b_i)]';$$

$$a_{00}^1 = 0,\quad a_{10}^1 = \frac{1}{p},\quad f_{00}^1 = y_{01},\quad g_{00}^1 = y_{01}^1 - \frac{1}{p},$$

$$y_{01} = -\frac{\psi_0}{p^2 + \varkappa_0\psi_0},\quad y_{02} = \frac{p}{p^2 + \varkappa_0\psi_0},\quad y_{01}^1 = \frac{p}{p^2 + \varkappa_0\psi_0},$$

$$y_{02}^1 = \frac{\varkappa_0}{p^2 + \varkappa_0\psi_0}.$$

Поступая аналогично в случае уравнений (7), получаем

$$y_{ku}^{IV} + py''_{ku} = \left[1 + \sum_{i=1}^{m}\delta_i\sigma_0(u - b_i)\right] y_{k-1u} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\gamma_i y'_{kx}(a_i)\sigma_3(u - b_i) + \sum_{i=1}^{m}\left[p\gamma_i y'_{kx}(a_i) +\right.$$
$$\left. + \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)\gamma_i y'''_{kx}(a_1)\right](u - b_i), \tag{16}$$

где

$$\sigma_3(u - b_i) = \sigma'''_0(u - b_i),$$

$$\delta_i = \left(1 + \sum_{j=1}^{i}\gamma_j\right)^2\left(1 + \sum_{j=1}^{i}\beta_j\right) - \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)^2\left(1 + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\right).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (8), имеет вид

$$y_k = \sum_{r=1}^{2} C_r \Phi_r^k = \sum_{k=1}^{2} C_r \left[\varphi_{rk}(u) + \sum_{i=1}^{m} \Phi_{rki}(u - b_i)\, \sigma_0 (u - b_i) \right]; \qquad (17)$$

где

$$\varphi_{rk}(u) = \sum_{j=0}^{2k+1} a_{jk}^r u^j + \sum_{j=0}^{k} f_{jk}^r u^j \cos \sqrt{p} u + \sum_{j=0}^{k} q_{jk}^r u^j \frac{\sin \sqrt{p} u}{\sqrt{p}},$$

$$\Phi_{rki}(u - b_i) = \sum_{j=0}^{2k+1} A_{jki}^r (u - b_i)^j + \sum_{j=0}^{k} F_{jki}^r (u - b_i)^j \cos \sqrt{p}\,(u - b_i) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} G_{jki}^r (u - b_i)^j \frac{\sin \sqrt{p}(u - b_i)}{\sqrt{p}}, \qquad (18)$$

причем коэффициенты a_{jk}^r, f_{jk}^r, g_{jk}^r, A_{jki}^r, F_{jki}^r, G_{jki}^r определяются последовательно с помощью рекуррентных соотношений. Например:

$$a_{0j+1}^k = \frac{a_{2j}^k}{p^3} - \frac{a_{0j}^k}{p^2} + \frac{f_{0j}^k}{p^2} + \frac{2g_1}{p^3}, \quad a_{1j+1}^k = \frac{-a_{1j}^k + g_{0j}^k - f_{1j}}{p^2},$$

$$a_{2j+1}^k = -\frac{a_{2j}^k}{p^2} + \frac{a_{0j}^k}{p}, \ \ldots \qquad (j = 0,\ 1);$$

$$A_{21i}^k = \frac{\delta_i}{p} \left[b_i a_{10}^k + \sum_{j=1}^{i-1} A_{10j}^k (b_i - b_j) \right],$$

$$A_{31i}^k = \frac{1}{p} \left[a_{10}^k \delta_i \left(1 + \sum_{j=1}^{i} \gamma_j \right) + \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \right) A_{10i}^k \right],$$

. . . .

$$A_{42i}^k = \frac{1}{p} \left[\left(1 + \sum_{j=1}^{i} \delta_j \right) B_{1j}^k + \delta_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} B_{1j}^k + n b_{1j}^k \right) \right],$$

$$A_{52j}^k = \frac{1}{p} \left[\left(1 + \sum_{j=1}^{i} \delta_j \right) B_{2j}^k + \delta_i \sum_{j=1}^{i-1} B_{2j}^k \right],$$

где

$$B_{1j}^k = [A_{21j}^k + (b_i - b_j)\, A_{31j}^k] \frac{1}{p}, \quad B_{2j} = \frac{A_{31j}^k}{p}, \ \ldots, \ b_{1j}^k = \frac{a_{21}^k}{p}, \ \ldots$$

Таким образом,

$$y(u) = \sum_{r=1}^{2} C_r \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_r^n (u)\, \omega^{2n}. \qquad (19)$$

Удовлетворяя теперь $y(u)$ граничному условию при $u = b_{m+1}$, соответствующему $x = 1$, требуя при этом нетривиального решения, приходим к характеристическому ряду

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \omega^{2n}, \qquad (20)$$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\alpha_{nk} - \varkappa_1 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \right) \chi_{nk} + \frac{\psi_1}{\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \right)} \lambda_{nk} - \varkappa_1 \psi_1 \mu_{nk} \right],$$

$$\alpha_{nk} = [(\Phi_1^k)''' (\Phi_2^{n-k})'' - (\Phi_2^k)''' (\Phi_1^{n-k})'']_{b_{m+1}},$$

$$\chi_{nk} = [(\Phi_1^k)(\Phi_2^{n-k})'' - (\Phi_2^k)(\Phi_1^{n-k})'']_{b_{m+1}},$$

$$\lambda_{nk}=[(\Phi_1^k)'''(\Phi_2^{n-k})'-(\Phi_2^k)'''(\Phi_1^{n-k})']_{b_{m+1}},$$

$$\mu_{nk}=[(\Phi_1^k)(\Phi_2^{n-k})'-(\Phi_2^k)(\Phi_1^{n-1})']_{b_{m+1}}.$$

Отметим, что коэффициенты характеристического ряда можно использовать при исследовании многих задач о колебаниях и устойчивости ступенчатых систем способами двусторонних оценок [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байдак Д. А., Зорій Л. М.* Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 6.
2. *Зорий Л. М.* Развитие динамического метода исследования механических систем с распределенными параметрами. Автореф. докт. дис. Львов, 1974.
3. *Лазарян Б. А., Коношенко С. И.* Преобразование аргумента в задачах о поперечных колебаниях стержней.— Прикладная механика, 1972, 8, № 7.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
6.X 1974 г.