уже первые приближения к критическому значению параметра нагрузки β^* дают достаточно узкую вилку *. Очевидно, что аналогично можно определять приближенные значения критических нагрузок и в более сложных случаях.

Таким образом, данный подход в отличие от численных методов позволяет относительно просто оценивать критические значения флаттера упруговязких систем, а также получать определенные качественные выводы о влиянии тех или иных параметров на характер поведения таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жинжер Н. И.* Об устойчивости неконсервативных упругих систем при наличии трения.— Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 4, с. 65—68.
2. *Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.* Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флаттері.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 6, с. 529—531.
3. *Зорий Л. М., Исаев Ю. И.* Двусторонние оценки критических параметров флаттера в некоторых особых случаях.— Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 199—201.
4. *Немат-Нассер, Просад, Герман.* Дестабилизирующее влияние сил, зависящих от скорости, в неконсервативных непрерывных системах.— Ракетная техника и космонавтика, 1966, вып. 7, с. 160—165.
5. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С.* Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций. М., Изд-во АН СССР, 1949.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.VIII 1974 г.

УДК 534. 1:531. 221. 3

О. И. Зяя, Н. И. Здеорук

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ

Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях прямолинейного стержня, нагруженного продольными усилиями интенсивности $\alpha f(x)$ (α — вещественный параметр, $f(x)$ — некоторая функция, заданная на отрезке $[0,1]$). Концы стержня считаются шарнирно опертыми. В данном случае приходим к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$\begin{gathered} y^{\mathrm{IV}}(x) + pf(x)\,y''(x) + pf'(x)\,y'(x) - \delta^4 y(x) = 0, \\ y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$p = \frac{\alpha l^3}{EI}, \quad \delta^4 = \frac{ml^4}{EI}\omega^2$$

(l, m, EI — соответственно длина, масса и изгибная жесткость стержня; ω — параметр частоты; $y(x)$ — отклонения стержня от прямолинейной формы равновесия).

Полагая

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\,p^n \tag{2}$$

и поступая аналогично работе [1], приходим к характеристическому уравнению задачи

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\delta)\,p^k = 0. \tag{3}$$

---

* Значение $\beta^* \approx 10{,}9$, определенное численными методами, приводится, например, в работах [1, 4].

При этом коэффициенты характеристического ряда $A_k(\delta)$ определяются формулами

$$A_0 = H_1(0),$$

$$A_1 = \int_0^1 [H_1(s) F_1(s) + H_2(s) F_2(s)]\, ds,$$

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^t G(t, t-s)\,[H_1(t) F_1(s) + H_2(t) F_2(s)]\, ds dt + \int_0^1 \varphi(1-s) F_1(s)\, ds \int_0^1 \varphi''(1-s) F_2(s)\, ds - \int_0^1 \varphi''(1-s) F_1(s)\, ds \int_0^1 \varphi(1-s) F_2(s)\, ds,$$

где

$$H_1(x) = \varphi^{\mathrm{IV}}(1)\,\varphi(1-x) - \varphi''(1)\,\varphi''(1-x),$$

$$H_2(x) = \varphi(1)\,\varphi''(1-x) - \varphi''(1)\,\varphi(1-x),$$

$$F_1(x) = \varphi''(x) f(x) + \varphi'(x) f'(x),$$

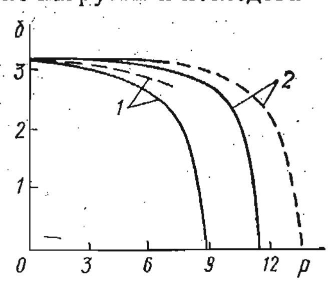
$$F_2(x) = \varphi^{\mathrm{IV}}(x) f(x) + \varphi'''(x) f'(x),$$

$$G(x, x-y) = f(x)\,\varphi''(x-y) + f'(x)\,\varphi'(x-y),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\delta^3}(\mathrm{sh}\,\delta x - \sin \delta x).$$

На основании полученных формул с использованием известных оценок [2] можно определять низшие частоты и критические нагрузки и исследовать их зависимость от различных параметров. Отметим, что аналогичные формулы нетрудно получить при других условиях закрепления стержня.

Пример. Определим основную частоту $\delta_1(p)$ для $f(x) = x(1-x)$ и $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4}\mathrm{sgn}(2x-1)$. Величина $\delta_1(p)$ определялась с недостатком и с избытком с использованием первых трех коэффициентов характеристического ряда (3). Результаты вычислений представлены на рисунке;



сплошные кривые отвечают нижним оценкам, а штриховые — верхним (случаю «1» соответствуют кривые *1*, а случаю «2» — кривые *2*). Очевидно, для получения более узкой «вилки», а также верхней оценки в случае «1» при $0 \leqslant \delta < 2{,}8$ необходимо привлечение последующих приближений (с использованием, например, пяти коэффициентов характеристического ряда).

Отметим, что в случае «1» нижняя оценка для критического значения $p_0 \approx 19{,}2\,\frac{EI}{l^2}$ отличается незначительно от полученного С. П. Тимошенко [3] энергетическим методом критического значения с избытком $p_0 = 20{,}4\,\frac{EI}{l^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байдак Д. А., Зорій Л. М.* Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок.— Допов. АН УРСР, 1972, № 6, с. 548—551.
2. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— ФХММ, 1971, № 3, с. 99—100.
3. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 6.VIII 1974 г.