a, T, R — некоторые постоянные. Следовательно, из равномерной сходимости рядов (7) вытекает равномерная сходимость ряда (6). Сходимость рядов (7) следует из неравенств

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^1 g(x)\, d_r^2(\varphi)\, dx \leqslant \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_{rs}^2,$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^1 g(x)\, d_r^2(\psi)\, dx \leqslant \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\psi_{rs}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байдак Д. А., Зорий Л. М.* Один способ обоснования динамического метода исследования упругих систем.— Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 89—98.
2. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений с аэродинамики больших сверхзвуковых скоростей.— ПММ, 1956, 20, № 6.
3. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.I 1974 г.

УДК 534.1:531.221.3

Л. М. Зорий, Ю. И. Исаев

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ФЛАТТЕРА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу об устойчивости консольного стержня, нагруженного на свободном конце следящей силой H. Стержень выполнен из линейного упруговязкого материала. Уравнение малых колебаний такого стержня около прямолинейной формы равновесия и краевые условия получаются, как обычно, с использованием принципа соответствия и имеют вид

$$\begin{gathered} EIN\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + HM\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + mM\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ v(0, t) = \frac{\partial v(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v(l, t)}{\partial z^3} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $z \in [0, l]$, m — погонная масса стержня; $M\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, $N\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ — временные операторы «комбинированной модели»

$$\nu_m \overset{(m)}{\sigma} + \cdots + \nu_1 \dot{\sigma} + \sigma = E(\varepsilon + \mu_1 \dot{\varepsilon} + \cdots + \mu_n \overset{(n)}{\varepsilon}). \tag{2}$$

Представляя решение в виде $v(z, t) = f(z)\exp\tilde{\lambda}t$ ($\tilde{\lambda}$ — характеристический показатель) и разделяя переменные, приходим к соответствующей задаче на собственные значения

$$\begin{gathered} f^{IV}(x) - \tilde{\beta} f''(x) - \tilde{\delta} f(x) = 0, \\ f(0) = f'(0) = f''(1) = f'''(1) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь

$$z = xl, \quad \tilde{\beta} = -\beta\frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}; \quad \beta = \frac{Hl^2}{EI};$$

$$M(\lambda) = 1 + \tilde{\nu}_1\lambda + \cdots + \tilde{\nu}_m\lambda^m; \quad N(\lambda) = 1 + \tilde{\mu}_1\lambda + \cdots + \tilde{\mu}_n\lambda^n;$$

$$\lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{a}; \quad \tilde{\nu}_i = \nu_i\sqrt{a}; \quad \tilde{\mu}_j = \mu_j\sqrt{a}; \quad a = \frac{ml^4}{EI}; \quad \tilde{\delta} = -\lambda^2\frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}.$$

При $\mu_j = \nu_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$) из (3) получаем задачу для случая, когда рассматриваемый стержень идеально упругий; в этом случае, как известно, автоколебательная потеря устойчивости обусловлена слиянием первой и второй частот.

Из отмеченного следует, что характеристическое уравнение задачи (3) имеет вид

$$F_0(\tilde{\beta}, \tilde{\delta}, x = 1) \equiv 1 - a_{4,0}(\tilde{\beta})\ \tilde{\delta} + a_{4,1}\ (\tilde{\beta})\tilde{\delta}^2 + \cdots = 0. \tag{4}$$

Левая часть этого уравнения не является целой функцией от λ; она имеет существенно особые точки в конечной части комплексной плоскости. При достаточно малых значениях параметров μ_j особые точки расположены вне круга некоторого радиуса R, так что при $|\lambda| < R$ функция F_0 является аналитической.

Рассмотрим последовательность функций

$$S_k = 1 + \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \left\{\sum_{l=0}^{k-n} b_{n-1}\tilde{\beta}^l\right\}\tilde{\delta}^n \qquad \left(b_{n-1,l} = 2^{2n-1}\ \frac{C_{2n-1+l}^{2n-1}}{(4n+2l)!}\right), \tag{5}$$

приближающих функцию F_0 равномерно в круге $|\lambda| < R$. Очевидно, что при достаточно больших значениях k корни $|\lambda_i| < R$ уравнения (4) будут мало отличаться от соответствующих нулей функции (5).

Предположим, что потеря устойчивости исследуемой системы обусловлена переходом в правую полуплоскость некоторых из корней $|\lambda_l| < R$. Тогда достаточно ограничиться рассмотрением соответствующего (5) полинома $P_k(\lambda) = S_k(\lambda)\ N^k(\lambda)$. В частности, этот полином для случая $m = n = 1$ в (2) имеет вид (учитываются только линейные члены по μ_1, ν_1)

$$P_k(\beta, \lambda) = 1 + k\mu_1\lambda + 2\varphi_2\lambda^2 + 2\mu_1 k\left[\varphi_2 - \frac{(1-\gamma)}{k}\varphi_3\right]\lambda^3 + 2^3\varphi_4\lambda^4 + \cdots$$

$$\cdots + 2^{2k-1}\varphi_{2k}\lambda^{2k} + 2^{2k-1}\mu_1 k\left[\varphi_{2k} - \frac{(1-\gamma)}{k}\varphi_{2k+1}\right]\lambda^{2k+1}, \tag{6}$$

где

$$\varphi_{2n} = \sum_{l=0}^{k-n}(-1)^l b_{n-1,l}\beta^l; \quad \varphi_{2n+1} = \sum_{l=0}^{k-n}(-1)^l (n+l)\, b_{n-1,l}\beta^l; \quad \gamma < 1 \quad (n=1, 2, \ldots, k)$$

Вещественная пара функций [5] для полинома (6) определяется формулами

$$u = 1 - 2\varphi_2\lambda^2 + 2^3\varphi_4\lambda^4 - \cdots + (-1)^k 2^{2k-1}\varphi_{2k}\lambda^{2k}; \tag{7}$$

$$v = k\mu_1\lambda v^* = k\mu_1\lambda\left[1 - 2\left(\varphi_2 - \frac{(1-\gamma)}{k}\varphi_3\right)\lambda^2 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (-1)^k 2^{2k-1}\left(\varphi_{2k} - \frac{(1-\gamma)}{k}\varphi_{2k+1}\right)\lambda^{2k}\right].$$

Отсюда видно, что при достаточно большом k корни (λ_l) этих функций будут близкими. Поэтому для нахождения критического значения параметра нагрузки будем пользоваться последовательностями двусторонних оценок работы [3].

Для определения критического значения β^* с недостатком ($\tilde{\beta}_2$) согласно [3] и (7) имеем уравнение

$$\tilde{\Delta}_2 = \varphi_5(\varphi_2\varphi_3 - 2\varphi_5) - \varphi_4\varphi_3^2 = 0. \tag{8}$$

Верхнее значение $\tilde{\beta}_3'$ найдем [2] из уравнения

$$\tilde{D}_3 = \tilde{\Delta}_2 + 2\varphi_3\varphi_7 = 0. \tag{9}$$

Из уравнений (8) и (9) видно, что значения $\tilde{\beta}_2$ и $\tilde{\beta}_3'$ не зависят от параметров μ_1, ν_1. Вычисления показывают, что $\tilde{\beta}_2 \approx 10{,}5$, а $\tilde{\beta}_3' \approx 11$. Следовательно, уже первые приближения к критическому значению параметра нагрузки β^* дают достаточно узкую вилку *. Очевидно, что аналогично можно определять приближенные значения критических нагрузок и в более сложных случаях.

Таким образом, данный подход в отличие от численных методов позволяет относительно просто оценивать критические значения флаттера упруго-вязких систем, а также получать определенные качественные выводы о влиянии тех или иных параметров на характер поведения таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жинжер Н. И.* Об устойчивости неконсервативных упругих систем при наличии трения.— Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 4, с. 65—68.
2. *Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.* Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флаттері.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 6, с. 529—531.
3. *Зорий Л. М., Исаев Ю. И.* Двусторонние оценки критических параметров флаттера в некоторых особых случаях.— Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 199—201.
4. *Немат-Нассер, Просад, Герман.* Дестабилизирующее влияние сил, зависящих от скорости, в неконсервативных непрерывных системах.— Ракетная техника и космонавтика, 1966, вып. 7, с. 160—165.
5. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С.* Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций. М., Изд-во АН СССР, 1949.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.VIII 1974 г.

УДК 534. 1:531. 221. 3

О. И. Зяя, Н. И. Здеорук

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ

Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях прямолинейного стержня, нагруженного продольными усилиями интенсивности $\alpha f(x)$ (α — вещественный параметр, $f(x)$ — некоторая функция, заданная на отрезке $[0,1]$). Концы стержня считаются шарнирно опертыми. В данном случае приходим к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$y^{IV}(x) + pf(x)\,y''(x) + pf'(x)\,y'(x) - \delta^4 y(x) = 0,\qquad y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0, \tag{1}$$

где

$$p = \frac{\alpha l^3}{EI}, \quad \delta^4 = \frac{ml^4}{EI}\omega^2$$

(l, m, EI — соответственно длина, масса и изгибная жесткость стержня; ω — параметр частоты; $y(x)$ — отклонения стержня от прямолинейной формы равновесия).

Полагая

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\,p^n \tag{2}$$

и поступая аналогично работе [1], приходим к характеристическому уравнению задачи

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\delta)\,p^k = 0. \tag{3}$$

---

* Значение $\beta^* \approx 10{,}9$, определенное численными методами, приводится, например, в работах [1, 4].