$$C_4 = \frac{qR^2}{Eh}\left[\frac{2[\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\,(1-2\theta) - \mathrm{ch}\,\alpha\sin\alpha\,(1-2\theta)}{\mathrm{ch}\,2\alpha\,(1-\theta) - \cos 2\alpha\,(1-\theta)} + \right.$$
$$\left. + \frac{-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha\,(1-2\theta) - \mathrm{sh}\,\alpha\cos\alpha\,(1-2\theta)}{\mathrm{ch}\,2\alpha\,(1-\theta) - \cos 2\alpha\,(1-\theta)}\right].$$

Из пятого уравнения этой системы получим зависимость размера области контакта от распределенной силы:

$$\bar{q} = \frac{1}{1 - \dfrac{4\sin\alpha\,(1-\theta)\,\mathrm{sh}\,\alpha\,(1-\theta)}{\mathrm{ch}\,2\alpha\,(1-\theta) - \cos 2\alpha\,(1-\theta)}},$$

где обозначено $\bar{q} = \frac{qR^2}{Eh}$, $\theta = \frac{a}{l}$.

График зависимости размера области контакта θ от интенсивности нагрузки q показан на рис. 2 для различных относительных длин оболочки $\frac{l}{R} = 4$ (*1*), 3 (*2*), 2 (*3*), 1(*4*) при $\frac{R}{h} = 9$, $\nu = 0{,}3$. Видно, что область контакта возрастает до некоторой величины даже при незначительном увеличении нагрузки, но затем дальнейшее увеличение зоны контакта возможно лишь при резком повышении величины q. Предельный случай $\theta \to 1$ возможен при $q \to \infty$.

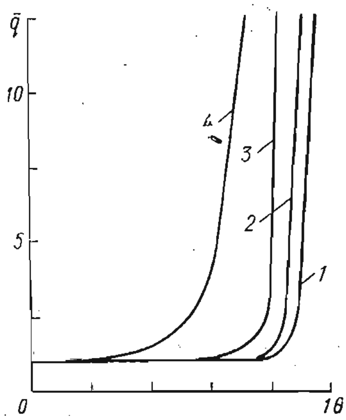

Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1968.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 6.I 1974 г.

УДК 539. 3

Д. А. Байдак, Л. М. Зорий

ОБОСНОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу о колебаниях и устойчивости прямоугольной ортотропной пластинки, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа (панельный флаттер). Пусть две противоположные стороны пластинки шарнирно оперты, а две другие — упругозащемлены. В срединной плоскости действуют распределенные сжимающие (растягивающие) усилия; учет аэродинамического воздействия потока производится согласно поршневой теории [2, 3]. При этом имеем такую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_1 a_1(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + p_2 a_2(x)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p_3 a_3(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_4 a_4(x)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$
$$+ p_5 a_5(x)\frac{\partial w}{\partial x} + p_6 a_6(x)\,w + g(x)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial w}{\partial t}\right] =$$
$$= F\left(t, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right);$$
$$V_{i0}\,[w(x, y, t)]_{x=0} = 0; \quad V_{i1}\,[w(x, y, t)]_{x=1} = 0, \qquad i = 1, 2; \qquad (1)$$
$$w(x, 0, t) = w''_{y^2}(x, 0, t) = w(x, 1, t) = w''_{y^2}(x, 1, t) = 0,$$
$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,w(x, y, 0) = \psi(x, y),$$

где V_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ — линейные дифференциальные выражения по переменной x (до третьего порядка включительно); F — некоторая непрерывная функция, зависящая от аргументов нелинейно и исчезающая при $w = 0$. Функции $a_i(x)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемыми необходимое число раз. Класс рассматриваемых возмущений $w(x, y, t)$ и устойчивость (неустойчивость) нулевого решения задачи (1) определяются аналогично работе [1].

Соответствующей (1) задачей на собственные значения будет задача

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + p_1 a_1(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + p_2 a_2(x)\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + p_3 a_3(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_4 a_4(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ p_5 a_5(x)\frac{\partial u}{\partial x} + p_6 a_6(x) u - \omega^2 g(x) u = 0,$$

$$V_{i0}[u(x, t)]_{x=0} = 0, \quad V_{i1}[u(x, t)]_{x=1} = 0, \qquad i = 1,\ 2;$$

$$u(x, 0) = u''_{y^2}(x, 0) = u(x, 1) = u''_{y^2}(x, 1) = 0.$$

Ее собственные функции имеют вид

$$u_{nm}(x, y) = X_{nm}(x)\sin n\pi y,$$

где X_{nm} — собственные функции краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$X^{\mathrm{IV}} + f_n(x) X'' + pa(x) X' + h_n(x) X - \omega_n^2 g(x) X = 0,$$
$$V_{i0}(X)_{x=0} = 0, \quad V_{i1}(X)_{x=1} = 0, \qquad i = 1,\ 2, \tag{2}$$

причем

$$f_n(x) = p_3 a_3(x) - \pi^2 n^2 p_1 a_1(x),$$

$$h_n(x) = p_6 a_6(x) - \pi^2 n^2 p_4 a_4(x) + \pi^4 n^4 p_2 a_2(x),$$

$$pa(x) = p_5 a_5(x), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Так как при $p = 0$ задача (2) самосопряжена, то ее собственные значения ω_{nm}^2 при каждом фиксированном значении n положительны с единственной точкой сгущения на бесконечности. Будем предполагать, что все они взаимно простые. Тогда существует последовательность максимальных полуинтервалов $[0, p_n^*]$ таких, что для $p \in [0, p_n^*)$

$$0 < \omega_{n1}^2(p) < \omega_{n2}^2(p) < \cdots < \omega_{nm}^2(p) < \cdots \tag{3}$$

Пусть $p^* = \inf\{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*, \ldots\}$, причем $p^* > 0$. Очевидно, что для $p \in [0, p^*)$ и всех значений n будут выполняться неравенства (3).

Рассмотрим последовательность непрерывных функций $c_n(t, x)$, удовлетворяющих при каждом значении $t \in [0,\ T]$ граничным условиям (2). Тогда они представимы в виде равномерно сходящихся рядов

$$c_n(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) X_{nm}(x), \quad p \in [0, p^*).$$

Так как последовательность $\{X_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_g^2(0,1)$, то коэффициенты T_{nm} должны удовлетворять условию

$$m\int_0^1 g(x)\, c_n^2(x, t)\, dx \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}^2(t) \leqslant M\int_0^1 g(x)\, c_n^2(x, t)\, dx. \tag{4}$$

Допустим, что решение задачи (1) представимо в виде разложения

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, t)\sin n\pi y, \tag{5}$$

где $T_{nm}(t)$ — функции, подлежащие определению. Тогда в соответствии с теоремой Рисса — Фишера справедливо равенство

$$\int_0^1 w^2(x, y, t)\, dy = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(t, x). \tag{6}$$

Если ряд (5) сходится равномерно по x при каждом $t \in [0, T]$, то

$$\|w\|^2 = \int_0^1\int_0^1 g(x)\, w^2(x, y, t)\, dxdy = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n(x, t)\|^2.$$

На основании условия (4) получаем

$$2m\|w\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}^2(t) \leqslant 2M\|w\|^2.$$

Совокупность функций $v_{rs}(x, y) = Y_{rs}(x)\sin r\pi y$, где $Y_{rs}(x)$ $(r, s = 1, 2, \ldots)$ — собственные функции задачи, сопряженной задаче (2), вместе с функциями $u_{nm}(x, y)$ образуют биортогональную систему функций с весом $g(x)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Таким образом, отыскивая решение задачи (1) в виде (5), сводим ее аналогично работе [1] к задаче Коши для четной системы уравнений второго порядка

$$T_{rs}'' + 2bT_{rs}' + \omega_{rs}^2 T_{rs} = \int_0^1\int_0^1 Fv_{rs}(x, y)\, dxdy,$$

$$T_{rs}(0) = \varphi_{rs}, \quad T_{rs}'(0) = \psi_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant p < p^*,$$

где φ_{rs} и ψ_{rs} — коэффициенты разложения соответственно функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в ряды по собственным функциям $u_{nm}(x, y)$.

Наложив на коэффициенты φ_{rs} и ψ_{rs}, а также на нелинейность F такие же условия, как в работе [1], существование и единственность решения задачи (1), а также теоремы об устойчивости (неустойчивости) по первому приближению можно доказать так же, как в работе [1]. Необходимо только показать, что ряд (6) сходится равномерно.

Согласно предположению относительно свойств функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ ряды

$$d_r(\varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} |\varphi_{rs}X_{rs}(x)|, \quad d_r(\psi) = \sum_{s=1}^{\infty} |\psi_{rs}X_{rs}(x)|$$

сходятся равномерно, поэтому

$$m\int_0^1 g(x)\, d_r^2(\varphi)\, dx \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{rs}^2 \leqslant M\int_0^1 g(x)\, d_r^2(\varphi)\, dx,$$

$$m\int_0^1 g(x)\, d_r^2(\psi)\, dx \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{rs}^2 \leqslant M\int_0^1 g(x)\, d_r^2(\psi)\, dx.$$

Предположим, что сходятся равномерно ряды

$$\sum_{r=1}^{\infty} d_r^2(\varphi), \quad \sum_{r=1}^{\infty} d_r^2(\psi). \tag{7}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(x, t) \leqslant (A^2 + AB)\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(\varphi) + (AB + B^2)\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(\psi),$$

где

$$A = \sup_{r,s}\left(1 + \frac{a+\mu}{\beta_r}\right), \quad B = \sup_{r,s}\frac{1+\mu}{\beta_{rs}},$$

$$\mu = \sqrt{2}aTR^{1+q}\max_{0\leqslant\theta\leqslant T} G(\theta)\,(m^{1+q}\min_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x))^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_{rs} = \sqrt{\omega_{sr}^2 - b^2},$$

a, T, R — некоторые постоянные. Следовательно, из равномерной сходимости рядов (7) вытекает равномерная сходимость ряда (6). Сходимость рядов (7) следует из неравенств

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^l g(x)\, d_r^2(\varphi)\, dx \leqslant \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{rs}^2,$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^l g(x)\, d_r^2(\psi)\, dx \leqslant \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{rs}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байдак Д. А., Зорий Л. М.* Один способ обоснования динамического метода исследования упругих систем.— Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 89—98.
2. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений с аэродинамики бо́льших сверхзвуковых скоростей.— ПММ, 1956, 20, № 6.
3. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.I 1974 г.

УДК 534.1:531.221.3

Л. М. Зорий, Ю. И. Исаев

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ФЛАТТЕРА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу об устойчивости консольного стержня, нагруженного на свободном конце следящей силой H. Стержень выполнен из линейного упруговязкого материала. Уравнение малых колебаний такого стержня около прямолинейной формы равновесия и краевые условия получаются, как обычно, с использованием принципа соответствия и имеют вид

$$\begin{gathered} EIN\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + HM\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + mM\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ v(0, t) = \frac{\partial v(0, t)}{\partial z} = \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v(l, t)}{\partial z^3} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $z \in [0, l]$, m — погонная масса стержня; $M\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, $N\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ — временные операторы «комбинированной модели»

$$\nu_m \overset{(m)}{\sigma} + \cdots + \nu_1 \dot\sigma + \sigma = E(\varepsilon + \mu_1 \dot\varepsilon + \cdots + \mu_n \overset{(n)}{\varepsilon}). \tag{2}$$

Представляя решение в виде $v(z, t) = f(z) \exp \tilde\lambda t$ ($\tilde\lambda$ — характеристический показатель) и разделяя переменные, приходим к соответствующей задаче на собственные значения

$$\begin{gathered} f^{IV}(x) - \tilde\beta f''(x) - \tilde\delta f(x) = 0, \\ f(0) = f'(0) = f''(1) = f'''(1) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь

$$z = xl, \quad \tilde\beta = -\beta \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}; \quad \beta = \frac{Hl^2}{EI};$$

$$M(\lambda) = 1 + \tilde\nu_1 \lambda + \cdots + \tilde\nu_m \lambda^m; \quad N(\lambda) = 1 + \tilde\mu_1 \lambda + \cdots + \tilde\mu_n \lambda^n;$$

$$\lambda = \tilde\lambda \sqrt{a}; \quad \tilde\nu_i = \nu_i \sqrt{a}; \quad \tilde\mu_j = \mu_j \sqrt{a}; \quad a = \frac{ml^4}{EI}; \quad \tilde\delta = -\lambda^2 \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}.$$