Рассмотрим конкретный пример. Пусть на гранях клина задана постоянная температура противоположных знаков $\pm T_0$. Тогда основное температурное поле $t_0(r, \theta) = \frac{T_0\theta}{\alpha}$ не вызывает в сплошном клине напряжений, и коэффициенты интенсивности напряжений будут обусловлены только возмущенным температурным полем. В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений $k_2^{(c)}$, подсчитанные для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (14) (выражение для $t(r)$ взято из работы [2]) и по соответствующей формуле для больших δ [2]. Как видно из таблицы, погрешность значений $k_2^{(c)}$ при $\frac{b}{a} = 5$ $(\delta = 1{,}24)$ не превышает 2,1% и очень быстро уменьшается с уменьшением $\frac{b}{a}$ (с ростом δ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
2. *Кит Г. С., Лысый И. П.* Влияние стационарного температурного поля на коэффициенты интенсивности напряжений в клине с трещиной.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1977, вып. 17, с. 88—92.
3. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое.— МТТ, 1968, № 2.
4. *Сметанин Б. И.* Об одной смешанной задаче теории упругости для клина.— ПММ, 1968, 32, № 4.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 6.XI 1975 г.

УДК 539. 3

Е. М. Федюк

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ТРЕЩИНОЙ

В настоящей работе предложен способ сведения задачи о напряженном состоянии пологой сферической оболочки с трещиной вдоль меридиана к системе сингулярных интегральных уравнений. При этом оболочка находится на упругом основании Винклера.

Представляя компоненты тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + e_{ij}^{0} \qquad (i, j = X, Y), \tag{1}$$

где $e_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора упругой деформации [2]; e_{ij}^{0} — компоненты тензора дисторсии, характеризующие скачки перемещений и углов поворота на линии трещины, для пологой сферической оболочки [1] получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции напряжений $\varphi(X, Y)$ и функции прогибов $w(X, Y)$:

$$\begin{gathered} \frac{R}{D_0}\nabla^2\nabla^2\varphi(X, Y) - \nabla^2 w(X, Y) = -RF_1^0(X, Y), \\ \nabla^2\varphi(X, Y) + D_1R\nabla^2\nabla^2 w(X, Y) + kRw(X, Y) = -D_1RF_2^0(X, Y). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$F_1^0 = \nabla^2\varepsilon_{22}^0 + \partial_2^2(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \partial_1\partial_2\varepsilon_{12}^0; \quad F_2^0 = \nabla^2(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) -$$
$$-(1-\nu)\left[\partial_2^2(\varkappa_{11}^0 - \varkappa_{22}^0) - 2\partial_1\partial_2\varkappa_{12}^0\right]; \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2;$$
$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial X}; \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial Y}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$

k — коэффициент упругого основания; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; R, $2h$ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки; X, Y — декартовые прямоугольные координаты.

Рассмотрим бесконечную пологую сферическую оболочку с трещиной длины $2l$, расположенной вдоль меридиана, к противоположным берегам которой приложены равные по величине и противоположно направленные усилия и моменты. Начало координат совместим с серединой трещины, а ось OX — с линией трещины. Для рассматриваемой трещины ($Y = 0$, $|X| \leqslant l$) поле дисторсий принимает вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_{22}^0(x, y) = \varepsilon_2(x)\,\delta(y); \quad \varepsilon_{12}^0(x, y) = \varepsilon_3(x)\,\delta(y),\\ \varkappa_{22}^0(x, y) = \varkappa_2(x)\,\delta(y) + \varkappa_4(x)\,\partial_2\delta(y); \quad \varkappa_{12}^0(x, y) = \varkappa_3(x)\,\delta(y)\\ \text{при } |x| < 1; \\ \varepsilon_{22}^0(x, y) = \varepsilon_{12}^0(x, y) = \varkappa_{22}^0(x, y) = \varkappa_{12}^0(x, y) = 0 \text{ при } |x| \geqslant 1;\\ \varepsilon_{11}^0(x, y) = \varkappa_{11}^0(x, y) = 0 \text{ при всех } x,\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{l}(v^+ - v^-); \quad \varepsilon_3(x) = \frac{1}{l}(u^+ - u^-); \quad \varkappa_4(x) = \int \varkappa_3(x)\,dx;$$

$$\varkappa_2(x) = -\frac{1}{l}(\theta_2^+ - \theta_2^-); \quad \varkappa_3(x) = -\frac{1}{l}(\theta_1^+ - \theta_1^-); \quad x = \frac{X}{l}; \quad y = \frac{Y}{l};$$

$\delta(y)$ — функция Дирака. Знаками «+» и «—» обозначены граничные значения соответствующей величины слева и справа от линии трещины.

Подставляя соотношения (3) в уравнения (2) и решая последние, для разрешающих функций φ и w получаем выражения

$$\begin{gathered} q_i(x, y) = \frac{l_i}{2\pi}\int_{-1}^{1}\{B[\varepsilon_2(\zeta)\,\Phi_i(x-\zeta, y) + \varepsilon_3(\zeta)\,\Phi_{i+2}(x-\zeta, y)] + \\ + \varkappa_2(\zeta)\,F_i(x-\zeta, y) - 2\mu\varkappa_3(\zeta)\,F_{i+2}(x-\zeta, y) + \varkappa_4(\zeta)\,F_{i+4}(x-\zeta, y)\}\,d\zeta \\ (i = 1,\ 2). \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь

$$\Phi_1 = -\psi_1\frac{z^2}{\rho^2} + \psi_2; \quad \Phi_2 = \psi_4 + d\left(\frac{y^2}{\rho^2} - \ln\rho - \frac{1}{2}\right); \quad \Phi_3 = \psi_1\frac{zy}{\rho^2};$$

$$\Phi_4 = F_3 + d\frac{zy}{\rho^2}; \quad F_1 = -\mu\psi_4 + \omega_2; \quad F_2 = \mu\Phi_1 + \omega_1;$$

$$F_3 = \psi_3\frac{zy}{\rho^2}; \quad F_4 = -\Phi_3; \quad F_5 = \mu\left(\psi_5\frac{y^3}{\rho^4} - 3\psi_3\frac{y}{\rho^2}\right) + \nu\lambda\omega_4\frac{y}{\rho};$$

$$F_6 = -\mu\left(\psi_6\frac{y^3}{\rho^4} - 3\psi_1\frac{y}{\rho^2}\right) + \nu\lambda\omega_3\frac{y}{\rho}; \quad \psi_1 = 2\psi_2 + \omega_1;$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\lambda^2\rho^2} + \frac{\omega_4}{\lambda\rho}; \quad \psi_3 = \frac{2\omega_3}{\lambda\rho} - \omega_2; \quad \psi_4 = -\psi_3\frac{z^2}{\rho^2} + \frac{\omega_3}{\lambda\rho};$$

$$\psi_5 = 4\psi_3 + \lambda\rho\omega_4; \quad \psi_6 = 4\psi_1 - \lambda\rho\omega_3; \quad \omega_1 = \operatorname{kei}\lambda\rho; \quad \omega_2 = \operatorname{ker}\lambda\rho;$$

$$\omega_3 = \operatorname{kei}'\lambda\rho; \quad \omega_4 = \operatorname{ker}'\lambda\rho; \quad \rho^2 = z^2 + y^2; \quad q_1 = w; \quad q_2 = \varphi;$$

$$l_1 = l^2; \quad l_2 = AD_1R\lambda^2; \quad \lambda^4 = \frac{D_0 l^4}{AD_1R^2}; \quad A = \frac{D_0}{D_0 + kR^2};$$

$$B = \frac{RA\lambda^2}{l^2}; \quad d = \frac{1-A}{2A}; \quad \mu = 1 - \nu; \quad z = x - \zeta; \quad \operatorname{ker}'\alpha = \frac{d}{d\alpha}\operatorname{ker}\alpha;$$

$$\operatorname{kei}'\alpha = \frac{d}{d\alpha}\operatorname{kei}\alpha;$$

$\operatorname{ker}\alpha$, $\operatorname{kei}\alpha$ — функции Кельвина.

Условия на контуре трещины в случае свободных берегов запишем так:

$$N_2(x, 0) = 0; \quad M_2(x, 0) = 0;$$
$$S(x, 0) = 0; \quad Q_2^*(x, 0) = 0; \quad |x| \leqslant 1, \tag{5}$$

где N_2, S, Q_2^* — соответственно нормальное, касательное и обобщенное поперечное усилия, M_2 — изгибающий момент, определяемые на контуре трещины как сумма усилий и моментов, вызванных полем (3) и соответствующих усилий и моментов в оболочке без трещины.

Используя формулы для усилий и моментов [3], а также выражения (3), (4), на основании соотношений (5) для определения функций $\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_3(x)$, $\varkappa_2(x)$, $\varkappa_3(x)$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений:

а) в случае симметричной относительно линии трещины нагрузки

$$\sum_{k=1,3} \int_{-1}^{1} \Psi_k(\zeta) K_{ik}(x-\zeta)\, d\zeta = f_{i0}(x), \quad |x| < 1 \quad (i = 1, 3); \tag{6}$$

б) в случае антисимметричной нагрузки

$$\sum_{k=2,4} \int_{-1}^{1} \Psi_k(\zeta) K_{ik}(x-\zeta)\, d\zeta = f_{i0}(x), \quad |x| < 1 \quad (i = 2, 4). \tag{7}$$

Здесь

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\varepsilon_2(\zeta); \quad \Psi_2(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\varepsilon_3(\zeta); \quad \Psi_3(\zeta) = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\zeta}\varkappa_2(\zeta);$$

$$\Psi_4(\zeta) = \frac{1}{B}\frac{d}{d\zeta}\varkappa_3(\zeta); \quad K_{11} = \frac{1}{2z} - A\left(\frac{1}{2z} - L_{11}\right); \quad K_{13} = AK_{31} = AL_{13};$$

$$K_{33} = L_{33}; \quad K_{22} = \frac{1}{2z} - A\left(\frac{1}{2z} - L_{22}\right); \quad K_{24} = AK_{42} = AL_{24}; \quad K_{44} = L_{44};$$

$$f_{30}(x) = \frac{2\pi}{D_1 B} M_{20}(x, 0); \quad f_{40}(x) = \frac{2\pi l}{D_1 B}\int Q_{20}^*(x, 0)\, dx + A_1,$$

A_1 — постоянная интегрирования. Величины L_{11}, L_{13}, L_{33}, L_{22}, L_{24}, L_{44} и $f_{10}(x)$, $f_{20}(x)$ приведены в работе [3].

В случае, когда упругое основание отсутствует ($k = 0$, $A = 1$), системы интегральных уравнений (6), (7) совпадают с приведенными в работе [3].

Для бесконечной пластины на упругом основании ($R = \infty$, $A = 0$) с прямолинейной трещиной $y = 0$, $|x| \leqslant 1$ из систем уравнений (6), (7) получим интегральные уравнения

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\varkappa_2(\zeta)}{d\zeta} K_{33}(x-\zeta)\, d\zeta = \frac{2\pi}{D_1} M_{20}(x, 0), \tag{8}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\varkappa_3(\zeta)}{d\zeta} K_{44}(x-\zeta)\, d\zeta = \frac{2\pi l}{D_1}\int Q_{20}^*(x, 0)\, dx + A_1, \tag{9}$$

которые имеют такую же структуру, что и интегральные уравнения для оболочки с трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961.
3. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.VIII 1974 г.