где

$$\varphi(0, \tau) = e^{-\frac{\tau}{2\tau_r}} I_0\left(\frac{\tau}{2\tau_r}\right) S_-(\tau); \tag{20}$$

б) в случае классической задачи

$$t\,|_{z=0} = 2\frac{q}{\lambda_t}\sqrt{\frac{\tau a}{\pi}}, \tag{21}$$

$$\sigma_{zz}\,|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{xx}\,|_{z=0} = \sigma_{yy}\,|_{z=0} =$$

$$= -2m_0\mu_0\left[t\,|_{z=0} - 2\varepsilon\frac{q}{\lambda_t}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^\tau e^{\varepsilon(\zeta-\tau)}\sqrt{\zeta}d\zeta\right]. \tag{22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.X 1974 г.

УДК 536. 21

Б. С. Воробец

О ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В работе [3] задача теплопроводности для тел с включениями сведена к краевой задаче для области, занятой основным материалом, при усложненных граничных условиях на внутренних поверхностях. Предполагалось, что на поверхности раздела материалов выполняются условия идеального теплового контакта. Рассмотрим более общий случай, когда на поверхности раздела материалов имеет место неидеальный тепловой контакт [2]:

$$p_0^2(t_2 + t_1) + 2\left(\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial n} - \lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n}\right) + 4H^{-1}k_*(t_2 - t_1) = 0,$$

$$p_0^2(t_2 - t_1) + 6\left(\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial n} + \lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n}\right) - 12H^{-1}(t_2 - t_1) = 0, \tag{1}$$

где $$p_0^2 = \frac{\Lambda_0}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] - C_0\frac{\partial}{\partial\tau},$$

$$\Lambda_0 = 2h\lambda_0;\ C_0 = 2hc_0;\ H = 2h\lambda_0^{-1};\ k_* = 2hk.$$

Здесь обозначено: λ_i — коэффициент теплопроводности: c_i — объемная теплоемкость; t_i — температура; $2h$ — толщина промежуточного слоя; k — средняя кривизна срединной его поверхности; A и B — коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности; n — внешняя ее нормаль; α, β — координаты точки на срединной поверхности слоя, отнесенной к линиям кривизны. Здесь и далее индекс $i = 0, 1, 2$ относит рассматриваемую величину к промежуточному слою, включению и основному материалу соответственно.

Линейное включение. Пусть включение, два характерных размера которого малы по сравнению с третьим, занимает область $r \leqslant R_0$. В предположении осевой симметрии температура включения описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_1}{\partial r} + p^2 t_1 = -\frac{q_1}{\lambda_1}, \quad p^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{2}$$

где r, s — радиальная и осевая координаты; a_i — коэффициент температуропроводности; q_i — интенсивность источников тепла. Будем считать, что на поверхности $r = R_0$ выполняются условия (1).

Пользуясь операторным методом [1], удовлетворяющее второму из условий (1) и ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (2) находим в виде

$$t_1 = \frac{J_0(pr)}{J(pR_0)} [(Hp_0^2 - 12) + 6H\lambda_1 D(p)]^{-1} \Big\{ (Hp_0^2 - 12)[t_* - U(R_0)] + $$

$$+ 6H\left[\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} + \lambda_1 \frac{dU(R_0)}{dr}\right]\Big\} + U(r), \tag{3}$$

$$U(r) = -\frac{\pi}{2\lambda_1} \int_0^r [J_0(pr) Y_0(p\eta) - Y_0(pr) J_0(p\eta)] q_1(\eta) \eta d\eta,$$

где $p_0^2 = \Lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - C_0 \frac{\partial}{\partial \tau}$; $D(p) = \frac{p J_1(pR_0)}{J_0(pR_0)}$; $\qquad t_2|_{r=R_0} = t_*$,

J_n, Y_n — функции Бесселя порядка $n = 0$; 1. Подставив в первое из условий (1) вместо t_1 соотношение (3), получим следующее граничное условие:

$$\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} = -[p_0^2 + (1 - 2k_*)\lambda_1 D(p) + H\lambda_1^2 D^2(p)] t_* +$$

$$+ [(1 - 2k_*) + H\lambda_1 D(p)] R_0^{-1} \int_0^{R_0} \frac{J_0(p\eta)}{J_0(pR_0)} q_1(\eta) \eta d\eta, \; k_* = hR_0^{-1}. \tag{4}$$

Таким образом, вместо исходной приходим к следующей краевой задаче: найти решение уравнения теплопроводности в области, занятой основным материалом, удовлетворяющее на поверхности $r = R_0$ условию (4), а на остальных границах области — обычным граничным условиям задачи теплопроводности, а также начальному условию.

Полученное граничное условие (4) является точным, однако оно содержит дифференциальные операторы бесконечно высокого порядка. Если в соотношении (4) разложить в ряд операторы $D(p)$ и $J_0(p\eta)[J_0(pR_0)]^{-1}$ по степеням R_0 и отбросить в этом разложении члены порядка R_0^2 и выше, то получим

$$\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} = -\frac{1}{2}\lambda_1 R_0 \left\{ \left[1 - k_0(1 - 2\lambda_*)\right] \frac{\partial^2 t_*}{\partial s^2} - [1 - k_0(1 - 2\varkappa_*)] \frac{1}{a_1} \frac{\partial t_*}{\partial \tau} \right\} +$$

$$+ \frac{R_0^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)[(1 - k_0 + 2H\lambda_1 R_0^{-1}) Q_0 - (1 - k_0) Q_1] + (1 - k_0) Q_0, \tag{5}$$

$$Q_n = R_0^{-1-2n} \int_0^{R_0} \eta^{2n+1} q_1(\eta) d\eta \qquad (n = 0, 1); \quad \lambda_1\lambda_* = \lambda_0; \quad c_1\varkappa_* = c_0; \quad k_0 = 2k_*.$$

Объемное включение. Рассмотрим включение в виде шара радиуса R_0. В случае центральной симметрии уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t_1}{\partial r} - p^2 t_1 = -\frac{q_1}{\lambda_1}, \quad p^2 = \frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{6}$$

Пусть на границе включения выполняются условия неидеального теплового контакта (1). Аналогично предыдущему решение уравнения (6), удовлетворяющее второму условию (1) и ограниченное при $r = 0$, будет таким:

$$t_1 = \frac{R_0 \operatorname{sh} pr}{r \operatorname{sh} pR_0} [(Hp_0^2 - 12) - 6H\lambda_1 D(p)]^{-1} \Big\{ (Hp_0^2 - 12)[t_* - U(R_0)] +$$

$$+ 6H\left[\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} + \lambda_1 \frac{dU(R_0)}{dr}\right]\Big\} + U(r); \quad p_0^2 = -C_0 \frac{\partial}{\partial \tau}; \tag{7}$$

$$U(r) = -(\lambda_1 pr)^{-1} \int_0^r \operatorname{sh} p(r - \eta) q_1(\eta) \eta d\eta; \quad D(p) = R_0^{-1}(pR_0 \operatorname{cth} pR_0 - 1).$$

Подставив это выражение в первое из условий (1), с учетом обозначения (7) найдем

$$\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} = -[p_0^2 - (1 - 2k_*)\lambda_1 D(p) + H\lambda_1^2 D^2(p)] t_* -$$

$$-[(1 - 2k_*) - H\lambda_1 D(p)] R_0^{-1} \int_0^{R_0} \frac{\operatorname{sh} p\eta}{\operatorname{sh} pR_0} q_1(\eta)\eta d\eta, \quad k_* = 2hR_0^{-1}. \qquad (8)$$

Разложив в этом граничном условии операторы $D(p)$ и $\operatorname{sh} p\eta$ $[\operatorname{sh} pR_0]^{-1}$ в ряд по степеням R_0 и отбросив члены порядка R_0^2 и выше, получим

$$\lambda_2 \frac{\partial t_*}{\partial r} = \frac{1}{3} R_0 c_1 [1 - 2k_*(1 - 3\varkappa_*)] \frac{\partial t_*}{\partial \tau} - (1 - 2k_*) Q_0 +$$

$$+ \frac{R_0^2}{6a_1} \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - 2k_* + 2H\lambda_1 R_0^{-1}) Q_0 - (1 - 2k_*) Q_1], \qquad (9)$$

$$Q_n = R_0^{-1-2n} \int_0^{R_0} \eta^{2n+2} q_1(\eta) d\eta \qquad (n = 0, 1).$$

Граничное условие (8) можно использовать в качестве приближенного и для объемных включений иной формы, если левую часть этого соотношения заменить производной от t_* по нормали.

Соотношения (4) и (8) при $h \to 0$ переходят в граничные условия, приведенные в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961.
2. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя.— Инж. физ. журн., 1963, 6, № 10, с. 129—136.
3. *Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Черниха Ю. А.* К термоупругой задаче для тел с включениями.— Прикладная механика, 1972, 8, № 12, с. 80—85.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 13.IX 1974 г.

УДК 539. 377

Г. С. Кит, И. П. Лысый

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА С ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим свободный от внешних усилий бесконечный клин, ограниченный лучами $\theta = \pm\alpha$ $(0 \leqslant r < \infty)$, в котором имеется теплоизолированная трещина длиной $2l = b - a$, расположенная на биссектрисе угла $(\theta = 0,$ $a \leqslant r \leqslant b)$. На гранях клина заданы стационарные температурные условия первого или второго рода. Температурное поле представим в виде суммы основного, имеющего место в сплошном клине, и возмущенного, обусловленного наличием трещины. Задача определения температурного поля рассматривалась в работе [2].

Основное температурное поле вызывает в сплошном клине нормальные $\sigma_{\theta\theta}^0$ и касательные $\sigma_{r\theta}^0$ напряжения. Для снятия с берегов трещины нормальных напряжений можно использовать метод, изложенный в работах [3,4]. Здесь остановимся на определении коэффициентов интенсивности напряжений, обусловленных возмущением заданного температурного поля и касательными усилиями $\sigma_{r\theta}^0$. Эти коэффициенты легко найти, если известна