

На рис. 2 графически изображены напряжения на круговом отверстии в зависимости от отношения  $\frac{a}{b}$ , если координаты точек  $A$  и  $B$  соответственно  $(1,25 a, 0)$ ,  $(1,35 a, 0)$ . Кривым 1 и 2 соответствуют величины  $\sigma_{\theta\theta}(A)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(B)$ . Отметим, что частный случай этой задачи, когда  $a = b$ , рассматривался в работе [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Максимович В. Н., Пляцко Г. В. Применение метода инверсии к определению напряжений в неоднородных телах. — Прикладная механика, 1974, 10, № 10, с. 70—76.
2. Пляцко Г. В., Максимович В. Н. Напряженное состояние в слое, обусловленное локальными физико-химическими превращениями. — ФХММ, 1972, № 3, с. 120—122.
3. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К., «Наук. думка», 1968.
4. Шмаков А. П. О законах отражения решений уравнений теории упругости и массовых сил через плоскую границу. — Упругость и неупругость, 1971, вып. 2, с. 3—12.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 3. IX 1974 г.

УДК 539. 3

Н. П. Флейшман, И. В. Огирко

#### К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ТИПА КИНЕСКОПА

Одной из важных проблем современного приборостроения является прочность и долговечность стеклянных оболочек электровакуумных приборов (ЭВП), подвергаемых внешнему атмосферному давлению. При решении этой проблемы необходимо определять поля напряжений в оболочках и особенно выявлять зоны растягивающих напряжений на их внешней поверхности.

Для широкого класса оболочек ЭВП типа кинескопов с плоским экраном в качестве расчетной модели с достаточной для практики точностью может быть принята пластинчатая система, состоящая из пяти прямоугольных и четырех трапециoidalных пластин переменной толщины, сочлененных между собой так, как показано на рисунке. Вследствие откачки воздуха из трубки каждая из этих пластин подвергается поперечному линейному изгибу под воздействием нормального давления  $q = \text{const}$ . Мембранные напряжения являются пренебрежимо малыми (в случае необходимости они могут быть определены приближенно).

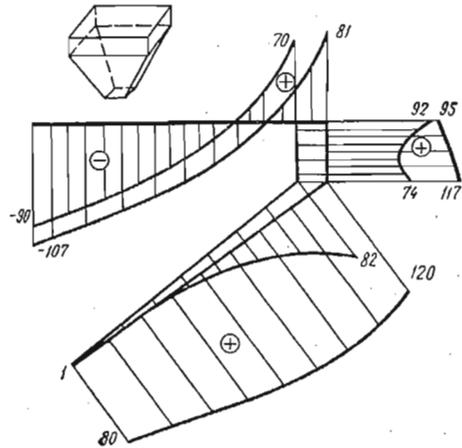
Предполагается, что прогибы  $W_i$  и  $W_j$  точек срединных плоскостей двух соседних пластин на линии  $l_{ij}$  их взаимного сочленения равны нулю, т. е.

$$W_i = W_j = 0 \text{ на } l_{ij}. \quad (1)$$

На тех же линиях  $l_{ij}$  должны выполняться условия равенства соответствующих нормальных изгибающих моментов и углов поворота, которые для двух соседних трапециoidalных пластин, например, записываются в виде

$$\frac{D_1}{\sin^2 \alpha_1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1^2} = \frac{D_2}{\sin^2 \alpha_2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\sin \alpha_2} \frac{\partial W_2}{\partial x_2}.$$



Здесь  $D_i$  — цилиндрическая жесткость;  $\alpha_i$  — острый угол между основанием  $O_i x_i$  трапеции и ее боковой стороной ( $i = 1, 2$ ). При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  из условий (2) следуют известные условия на остальных линиях сопряжения пластин конструкции.

Нижнее сечение  $L$  трубки (см. рисунок) считается жестко защемленным, т. е.

$$W_i = \frac{\partial W_i}{\partial y_i} = 0 \text{ на } L. \quad (3)$$

(В трапециoidalных пластинках оси  $y_i$  направлены перпендикулярно к основанию.)

Для пластин, толщина  $h$  которых изменяется линейно, например, по направлению  $Ox$ , т. е. при  $h = h_0(1 - \alpha x)$ , дифференциальное уравнение изгиба имеет вид [4]

$$P(W) \equiv (1 + \alpha x)^2 \Delta \Delta W + 6\alpha(1 + \alpha x)^2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta W + \\ + 6\alpha^2(1 + \alpha x) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - q/D_0 = 0. \quad (4)$$

Здесь  $D_0$  — цилиндрическая жесткость на линии  $x = 0$ .

Итак, расчет рассматриваемой конструкции сводится к интегрированию уравнений типа (4) для каждой из пластин при соответствующих граничных условиях (3) и условиях сопряжения типа (1), (2).

Так как имеются две плоскости геометрической и силовой симметрии, достаточно ограничиться рассмотрением лишь одной четверти конструкции, состоящей из пяти пластин. При этом искомые функции прогибов должны обладать известными условиями симметрии.

Аналитическое решение задачи сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Для ее численного решения здесь используется разностный аналог метода типа Ньютона — быстро сходящийся итерационный метод релаксации [3], позволяющий эффективно применять ЭВМ.

Введением безразмерных координат каждая из прямоугольных пластин приводится сначала к квадратной области со стороной, равной единице, на которой выбирается квадратная сетка с шагом  $\bar{h} = 1/N$ .

Затем дифференциальные операторы в уравнении (4) аппроксимируются конечно-разностными выражениями повышенной точности [2] с погрешностью  $o(\bar{h}^4)$ . Таким образом, получена система алгебраических уравнений относительно значений  $W_{ik}$  прогибов пластин во внутренних узлах  $(i, k)$  сетки. В эту систему входят также по два ряда законтурных точек. Значения искомых функций в законтурных точках выражаются через их значения во внутриконтурных точках с помощью условий симметрии и граничных условий после их аппроксимации соответствующими конечно-разностными выражениями.

Заданием начальных значений всех искомых прогибов в виде

$$W_{ik}^{(0)} = (N^2 - i^2)(N^2 - k^2) A$$

последовательные приближения для прогибов  $W_{ik}^{(n+1)}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) в узлах сетки определяются по формуле

$$W_{ik}^{(n+1)} = W_{ik}^{(n)} - \alpha P[W_{ik}^{(n)}]/P', \quad (5)$$

где  $P'$  — постоянный коэффициент при  $W_{ik}$  в конечно-разностном выражении  $P[W_{ik}]$ , аппроксимирующем невязку  $P[W]$  (4);  $\alpha$  — параметр релаксации;  $A$  — задаваемый постоянный множитель.

Процесс (5) продолжается до тех пор, пока не достигается необходимая точность прогибов во всех пластинках, а именно:

$$|W_{ik}^{(n+1)} - W_{ik}^{(n)}| \leq \epsilon. \quad (6)$$

После этого по известным формулам [4] определяются изгибные нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  во всех узлах конструкции.

Для расчета напряжений в оболочке ЭВП типа кинескопа составлена программа на языке АЛГОЛ-60 применительно к транслятору ТА-1М ЭВМ «М-222». Эта программа может быть использована, в частности, как составная часть при расчетах по определению вероятности разрушения стеклянной конструкции при длительном хранении. На основе этой программы рассчитаны напряжения в оболочках целого ряда приборов. Характер их распределения один и тот же.

Для одного типа приборов, трубки которых состоят из пластин постоянной толщины, эпюры расчетных нормальных напряжений на внешней поверхности конструкции в точках малого и большого сечения, совпадающих с плоскостями симметрии, приведены на рисунке, где цифрами обозначены напряжения, выраженные в килограммах на квадратный сантиметр. Время счета одного варианта составляет в среднем 10 мин.

В этом примере максимальные растягивающие напряжения возникают на линии перехода от пояса трубки к ее пирамидальной части. Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Для определения точности расчета по той же программе была рассчитана одна квадратная пластинка с жестко защемленным краем. Исследовалось влияние величины  $\varepsilon$  (6), параметра  $\alpha$  и шага сетки  $\bar{h}$  на точность вычисления. Установлено, что при  $N = 6$  и  $\varepsilon = 10^{-7}$  напряжения и прогибы в центре пластинки отличаются от известных значений тех же величин, найденных на основании аналитического решения [4], меньше чем на 0,1%. Указанные выше значения  $N$  и  $\varepsilon$  практически можно считать оптимальными с точки зрения точности расчета и расхода машинного времени.

Параметр  $\alpha$  изменяется в пределах  $0,1 \leq \alpha \leq 1,5$ . Установлено, что с ростом  $\alpha$  итерационный процесс быстрее сходится, однако точность вычисления тем больше, чем меньше  $\alpha$ . Поэтому при недостаточном хорошем начальном приближении  $W_{ik}^{(0)}$  следует принять сначала  $\alpha = 1 \div 1,5$ , а затем после нескольких итераций можно взять  $\alpha = 0,1$ , например, для уточнения результатов.

Для машинного проектирования пластинчатой конструкции стеклянной трубки электровакуумного прибора, т. е. для автоматического подбора толщин ее элементов при заданном допуске напряжении [6] использован итерационный метод [1], согласно которому толщина  $j$ -й пластинки  $h_j$  последовательно оптимизируется по формуле

$$h_j^{i+1} = \frac{1}{2} h_j^i (K_j^i + 1) \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

где  $K_j^i = \sigma_j / [\sigma]$  — отношение расчетного напряжения (максимального растягивающего напряжения на внешней поверхности стеклянной пластинки) к допусковому на  $i$ -м шаге итерации. Начальные значения  $h_j^0$  задаются. Коэффициенты  $K_j^i$ , характеризующие степень напряженности  $j$ -й пластинки на  $i$ -м шаге, вычисляются на основе упомянутой выше программы. Процесс (7) продолжается до тех пор, пока не выполняется условие  $|K_j^i - 1| < \varepsilon_0$ . Задаваемый параметр  $\varepsilon_0$  определяет меру отклонения расчетного напряжения от допускаемого для данного материала.

В качестве примера оптимизация конструкции проводилась для стеклянной трубки с плоским экраном размера  $295 \times 245$  мм. В качестве начальных значений толщин было принято: для экрана  $h_1 = 10$  мм, для пояса  $h_2 = h_3 = 8$  мм, для пирамидальной части  $h_4 = h_5 = 7$  мм. При  $[\sigma] = 90$  кг/см<sup>2</sup> после семи итераций за 15 мин найдены оптимальные значения толщин  $h_1 = 9,154$  мм,  $h_2 = 9,115$  мм,  $h_3 = 9,064$  мм,  $h_4 = 9,21$  мм,  $h_5 = 9,51$  мм.

На каждом шаге итерационного процесса при вычислении напряжений (для определения коэффициентов  $K_j^i$ ) в качестве начальных принимались прогибы, найденные на предыдущем шаге.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малков В. П., Туринцева Г. Д. Оптимизация сосуда под давлением из условий прочности. Методы решения задач упругости и пластичности.— Учен. записки Горьк. ун-та, 1970, № 2. Механика, вып. 108, с. 113—127.
2. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластинки. М., «Наука», 1966.
3. Перроне Као. Применение общего итерационного метода нелинейной релаксации для решения нелинейных задач механики.— Прикладная механика, 1971, № 2, с. 82—86.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
13.IX 1974 г.