

В. Н. Максимович

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВЕРСИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Получаемые методом инверсии решения задач теории упругости [1, 2, 4] обладают общностью и удобны для приложений. В данной работе рассмотрим задачи теории упругости, решенные с применением метода инверсии: задачу для неоднородной плоскости под действием массовых сил и задачу о концентрации напряжений.

Рассмотрим задачу об определении напряженно-деформированного состояния бесконечной пластинки, составленной из двух склеенных полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$ с упругими постоянными μ_1, χ_1 и μ_2, χ_2 и находящейся под действием массовых сил. Пусть напряженное состояние бесконечной пластинки при тех же массовых силах, которые размещены в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) с упругими постоянными μ_1, χ_1 (μ_2, χ_2), описывается функциями $\Phi_1^0(z), \Omega_1^0(z)$ ($\Phi_2^0(z), \Omega_2^0(z)$), а напряжения равны $\sigma_{xx}^1(x, y), \sigma_{yy}^1(x, y)$ ($\sigma_{xx}^2(x, y), \sigma_{yy}^2(x, y)$); $\Omega(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) + \Psi(z)$.

Тогда аналогично работе [1] решение для $y > 0$ можно записать в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_1^0(z) + (a_{21} - 1)\bar{\Omega}_1^0(z) + a_{11}\Phi_2^0(z), \quad (1)$$

$$\Omega_1(z) = \Omega_1^0(z) + (a_{22} - 1)\Phi_1^0(z) + a_{12}\Omega_2^0(z),$$

$$a_{ij} = \frac{a_i}{b_j}, \quad a_i = \mu_i(1 + \chi_k), \quad b_j = \mu_j + \chi_j\mu_k, \quad i, j, k = 1, 2; \quad k \neq j.$$

Чтобы получить решение $\Phi_2(z), \Omega_2(z)$ для $y < 0$, следует поменять здесь индексы «1» и «2» местами. Напряжения по линии склеивания $y = 0$ будут такими:

$$4\sigma_{yy}(x, \pm 0) = a_{22}\sigma_1^0(x, 0) + a_{11}\sigma_2^0(x, 0) + a_{21}[3\sigma_{yy}^1(x, 0) - \sigma_{xx}^1(x, 0)] + a_{12}[3\sigma_{yy}^2(x, 0) - \sigma_{xx}^2(x, 0)],$$

$$\sigma_1(x, +0) = \sigma_1^0(x, 0) + a_{11}\sigma_2^0(x, 0) + (a_{21} - 1)[3\sigma_{yy}^1(x, 0) - \sigma_{xx}^1(x, 0)],$$

где $\sigma(x, y) = \sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y)$. Полученные методом инверсии формулы удобны для определения концентрации напряжений в неоднородных областях.

Рассмотрим бесконечную пластинку, составленную из двух склеенных полуплоскостей $y \geq -h$ и $y < -h$ с упругими постоянными μ_1, χ_1 и μ_2, χ_2 . Пусть полуплоскость $y > -h$ ослаблена криволинейным отверстием с контуром L . Область вне единичного круга в плоскости φ отображается на область вне отверстия функцией $\omega(\varphi)$:

$$z = \omega(\varphi) = R \left(\varphi + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\varphi^k} \right).$$

Определим напряженное состояние, когда к отверстию приложены усилия, главный вектор и момент которых равны нулю.

Из изложенного видно, что при $y > -h$ $\bar{\varphi}(z) = \varphi_*(z) + \varphi_0(z), \chi(z) = \chi_*(z) + \chi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z) = A_2[\bar{\chi}_*(z + 2ih) - 2ih\bar{\varphi}_*(z + 2ih)],$$

$$\chi_0(z) = B_2\bar{\varphi}_*(z + 2ih) - 2ih\varphi_0'(z),$$

$\varphi_*(z), \chi_*(z)$ — любые голоморфные вне L функции; $\chi(z) = z\varphi'(z) + \psi(z) = \int \Omega(z) dz, A_2 = a_{21} - 1, B_2 = a_{21} - 1, \bar{\varphi}(z) = \int \Phi(z) dz.$

Функции $\varphi_*(z)$ и $\chi_*(z)$ представим в виде [3]

$$\varphi_*(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{[\varphi(z)]^m}, \quad \chi_*(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{[\varphi(z)]^m}. \quad (2)$$

Наметим вкратце приближенное решение для случая, когда отверстие имеет вид квадрата с закругленными углами. Напряженное состояние в неоднородной пластинке складывается из полей напряжений в пластинке без отверстия и полей напряжений, обусловленных наличием отверстия. Допустим, что первое из них характеризуется такими напряжениями вблизи предполагаемого отверстия: $\sigma_{xx}^0 = p$, $\sigma_{yy}^0 = q$, $\tau_{xy}^0 = 0$. Тогда для определения другого поля напряжений необходимо определить функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ из условия на L :

$$\tilde{\varphi}(z) + (z - \bar{z}) \overline{\tilde{\varphi}'(z)} + \overline{\chi(z)} = -\frac{p+q}{2}z + \frac{p-q}{2}\bar{z}. \quad (3)$$

Положим $\omega(\varphi) = \varphi + m\varphi^{-3}$ ($m = 9^{-1}$). Определим функции $\tilde{\varphi}(z)$ и $\chi(z)$ с точностью до λ^4 ($\lambda = \frac{1}{2h}$). Учитывая, что

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_*(z + 2ih)} &= -z(\bar{\alpha}_1\varepsilon^2 + 2\bar{\alpha}_2\varepsilon^3 + 3\bar{\alpha}_3\varepsilon^4) + z^2(\bar{\alpha}_1\varepsilon^3 + 3\bar{\alpha}_2\varepsilon^4 + 6\bar{\alpha}_3\varepsilon^5) - \\ &- z^3(\bar{\alpha}_1\varepsilon^4 + 4\bar{\alpha}_2\varepsilon^5 + 10\bar{\alpha}_3\varepsilon^6) + z^4(\bar{\alpha}_1\varepsilon^5 + 5\bar{\alpha}_2\varepsilon^6) - \\ &- z^5\bar{\alpha}_1\varepsilon^6 - 3m\varphi\bar{\alpha}_1\varepsilon^6 + \dots, \quad \overline{\chi_*(z + 2ih)} = \dots, \end{aligned}$$

с точностью до величин λ^4 получим

$$\varphi_0(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3, \quad \chi_0(z) = \gamma'_1 z + \gamma'_2 z^2 + \gamma'_3 z^3 - 3A_2 m \bar{\alpha}_1 \varepsilon^4 \frac{d^2 \varphi}{dz^2},$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_3$ — постоянные, выражающиеся через α_1, \dots, β_3 . Например:

$$\gamma_1 = -A_2 [(\bar{\beta}_1 + 2\bar{\alpha}_1)\varepsilon^2 + 2(\bar{\beta}_2 + 3\bar{\alpha}_2)\varepsilon^3 + 3(\bar{\beta}_3 + 4\bar{\alpha}_3)\varepsilon^4], \quad \varepsilon = -i\lambda.$$

Считая коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_3$ известными, методом Мусхелишвили из (3) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_*(z) &= \left(\frac{p-q}{2} + m\alpha_1 \right) \varphi^{-1} - m(\gamma_1 + \bar{\gamma}_1) \varphi^{-3} - \gamma_2(2m\varphi^{-2} + m^2\varphi^{-6}) - \\ &- \gamma_3(2m + 3m^2\varphi^{-4} + m^2\varphi^{-8}) \varphi^{-1} - 2\bar{\gamma}_2 m \varphi^{-4} - 3\gamma_3(1 + 2m^2 + m\varphi^{-4}) \varphi^{-1} - \\ &- (\bar{\gamma}'_1 - \bar{\gamma}_1) \varphi^{-1} - (\bar{\gamma}'_2 - 2\bar{\gamma}_2) \varphi^{-2} - (\bar{\gamma}'_3 - 3\bar{\gamma}_3) \varphi^{-3} - \frac{p+q}{2} m \varphi^{-3} + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \chi_*(z) &= -\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \omega(\varphi)}{\omega'(\varphi)} \varphi'_*(\varphi) - m\alpha_1 \varphi - \frac{p+q}{2} \varphi^{-1} - (\bar{\gamma}'_1 + \gamma_1) \varphi^{-1} - \\ &- \bar{\gamma}'_2 \varphi^{-2} - \bar{\gamma}'_3 \varphi^{-3} + \frac{m(p-q)}{2} \varphi^{-3} - 2\gamma_2 m \varphi^{-4} - 3\gamma_3 \left(\frac{2m-m^3}{\varphi^3} + \frac{m^2}{\varphi^7} \right) - \\ &- (\gamma'_1 - \gamma_1) m \varphi^{-3} - (\gamma'_2 - 2\gamma_2)(2m\varphi^{-2} + m^2\varphi^{-6}) - \\ &- (\gamma'_3 - 3\gamma_3)(3m\varphi^{-1} + 3m^2\varphi^{-5} + m^3\varphi^{-9}) + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях φ^{-k} ($k = 1, 2, 3$) в выражениях (2) и (4), получаем систему уравнений для определения α_1, \dots, β_3 . Выпишем первое:

$$(1-m)\alpha_1 + 3m\gamma_3 + 3(1+2m^2)\bar{\gamma}_3 + \bar{\gamma}'_1 - \bar{\gamma}_1 = \frac{p-q}{2},$$

Применяя полученные методом инверсии формулы, определим напряженное состояние около малого кругового включения в бесконечной пластинке, ослабленной еще эллиптическим отверстием. Для этого достаточно (в первом приближении) знать напряжения в пластинке только с заданным отверстием [1], которые определяются функциями Мусхелишвили $\tilde{\varphi}(\varphi) = \varphi(\omega(\varphi))$, $\psi(\varphi) = \psi(\omega(\varphi))$, где $z = \omega(\varphi)$ — функция, отображающая внутренность $|\varphi| < 1$ на область вне отверстия.

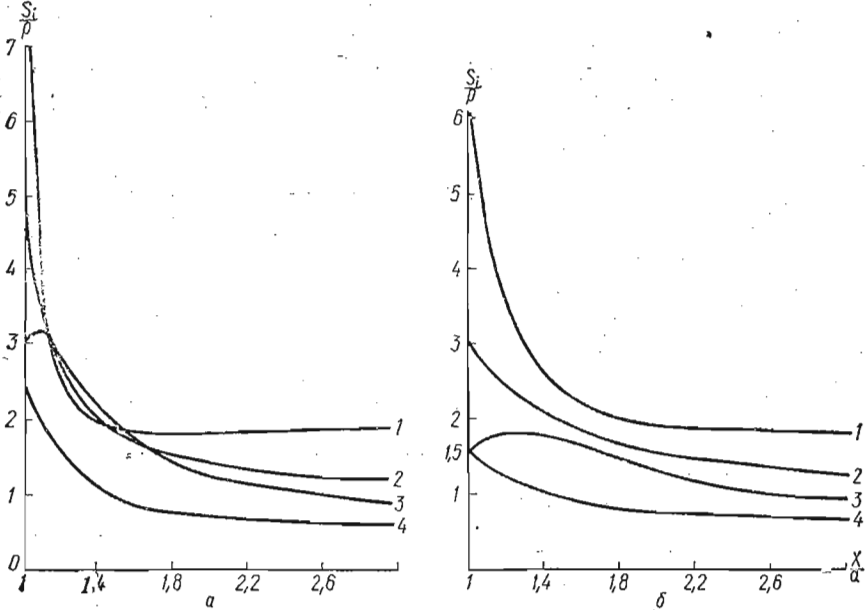


Рис. 1

Для эллипса с полуосями a и b при растяжении пластинки вдоль полуоси b усилиями p [3]

$$\tilde{\varphi}'(\varphi) = -\frac{p}{4} R(2 + n + \varphi^{-2}), \quad \psi'(\varphi) = \frac{p}{2} R \left[-\varphi^{-2} + \frac{n\varphi^4 - (3 + n n_1)\varphi^2 - n_1}{(n\varphi^2 - 1)^2} \right],$$

$$\omega(\varphi) = R(n\varphi + \varphi^{-1}), \quad R = (a + b) \cdot 2^{-1}, \quad n = (a - b) \cdot 2^{-1}, \quad n_1 = n^2 + n + 1.$$

На рис. 1, а, б приведены значения $S_1 = 2(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})$, $S_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$, $S_3 = -S_2 \cdot \chi^{-1}$, $S_4 = (1 + 3\chi^{-1})\sigma_{xx} + (1 - \chi^{-1})\sigma_{yy}$ при $\nu = 0,33$ в точках действительной оси для пластинки с эллиптическим отверстием при

значениях $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$; 1 соответственно.

Кривые 1—4 показывают изменение величин $S_1, S_2, S_3, -S_4$. Пользуясь этими графиками легко определить напряжения в точках границы круга, лежащих на оси x . Пусть в точке $(x_0, 0)$ лежит центр круга, а точка $(x_1, 0)$ лежит на границе круга. Тогда для кругового отверстия $\sigma_{\theta\theta} = S_1(x_1) + S_2(x_0)$, а когда включение жесткое, то

$$\sigma(x_1, 0) = S_3(x_1) + S_4(x_0),$$

$$\sigma_{rr}(x_1, 0) = 0,75\sigma(x_1, 0),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x_1, 0) = 0,25\sigma(x_1, 0).$$

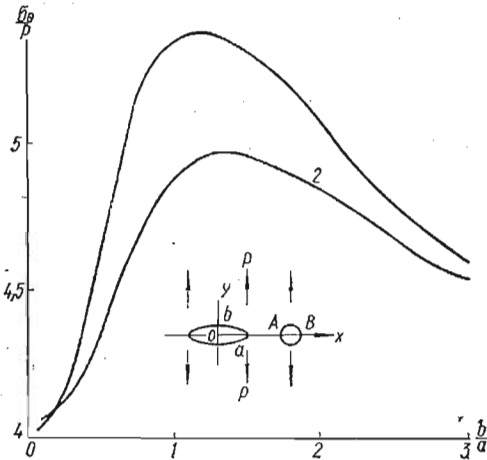


Рис. 2

На рис. 2 графически изображены напряжения на круговом отверстии в зависимости от отношения $\frac{a}{b}$, если координаты точек A и B соответственно $(1,25 a, 0)$, $(1,35 a, 0)$. Кривым 1 и 2 соответствуют величины $\sigma_{\theta\theta}(A)$ и $\sigma_{\theta\theta}(B)$. Отметим, что частный случай этой задачи, когда $a = b$, рассматривался в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимович В. Н., Пляцко Г. В. Применение метода инверсии к определению напряжений в неоднородных телах. — Прикладная механика, 1974, 10, № 10, с. 70—76.
2. Пляцко Г. В., Максимович В. Н. Напряженное состояние в слое, обусловленное локальными физико-химическими превращениями. — ФХММ, 1972, № 3, с. 120—122.
3. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К., «Наук. думка», 1968.
4. Шмаков А. П. О законах отражения решений уравнений теории упругости и массовых сил через плоскую границу. — Упругость и неупругость, 1971, вып. 2, с. 3—12.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 3. IX 1974 г.

УДК 539. 3

Н. П. Флейшман, И. В. Огирко

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ТИПА КИНЕСКОПА

Одной из важных проблем современного приборостроения является прочность и долговечность стеклянных оболочек электровакуумных приборов (ЭВП), подвергаемых внешнему атмосферному давлению. При решении этой проблемы необходимо определять поля напряжений в оболочках и особенно выявлять зоны растягивающих напряжений на их внешней поверхности.

Для широкого класса оболочек ЭВП типа кинескопов с плоским экраном в качестве расчетной модели с достаточной для практики точностью может быть принята пластинчатая система, состоящая из пяти прямоугольных и четырех трапециoidalных пластин переменной толщины, сочлененных между собой так, как показано на рисунке. Вследствие откачки воздуха из трубки каждая из этих пластин подвергается поперечному линейному изгибу под воздействием нормального давления $q = \text{const}$. Мембранные напряжения являются пренебрежимо малыми (в случае необходимости они могут быть определены приближенно).

Предполагается, что прогибы W_i и W_j точек срединных плоскостей двух соседних пластин на линии l_{ij} их взаимного сочленения равны нулю, т. е.

$$W_i = W_j = 0 \text{ на } l_{ij}. \quad (1)$$

На тех же линиях l_{ij} должны выполняться условия равенства соответствующих нормальных изгибающих моментов и углов поворота, которые для двух соседних трапециoidalных пластин, например, записываются в виде

$$\frac{D_1}{\sin^2 \alpha_1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1^2} = \frac{D_2}{\sin^2 \alpha_2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\sin \alpha_2} \frac{\partial W_2}{\partial x_2}.$$