

Числовые примеры рассматривались для области, ослабленной одинаковыми эллиптическими ($N = 1, m = \frac{1}{3}$) или квадратными ($N = 3, m = -\frac{1}{9}$) отверстиями при $\epsilon = 0,3$. Большая ось эллиптических отверстий во всех примерах параллельна тепловому потоку.

Значения кольцевых напряжений $\sigma_{\theta}^{(j)}$, распределенных около контура L_0 , приведены в табл. 1 в долях $\frac{\alpha_1 E q R}{\lambda_1} r_j$. Напряжения $\sigma_{\theta}^{(1)}$ соответ-

Таблица 2

N	r	H						
		0	0,5	1	2	5	10	∞
N=1	r_0	-1,289	-0,573	-0,241	0,076	0,378	0,511	0,667
	r_1	-0,916	-0,486	-0,224	0,078	0,429	0,608	0,972
	r_2	2,165	0,699	0,260	-0,074	-0,338	-0,440	-0,507
N=3	r_0	-1,017	-0,358	-0,024	0,314	0,655	0,811	1,00
	r_1	-0,781	-0,324	-0,023	0,346	0,814	1,089	1,422
	r_2	1,458	0,401	0,024	-0,287	-0,548	-0,654	-0,771

вуют случаю, когда тепловой поток параллелен оси Ox ($\alpha = 0$), а $\sigma_{\theta}^{(2)}$ — при тепловом потоке, параллельном оси Oy ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). Для сравнения даны напряжения $\sigma_{\theta}^{(0)}$, которые возникают в тех же точках области с одним отверстием. Значения соответствующих коэффициентов r_j в зависимости от величины H подбираются из табл. 2.

Анализ числовых результатов показывает, что при $\alpha = 0$ ($\epsilon = 0,3$) напряжения σ_{θ} меньше, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\epsilon = 0,3$) они значительно больше, чем соответствующие напряжения в области с одним отверстием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С. О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий. — В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 1964.
2. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. — Прикладная механика, 1972, 8, № 7.
3. Мартынович Т. Л., Нищенко И. О., Махмуд Аллам. Температурні напруження біля криволінійних отворів, викликані однорідним тепловим потоком на нескінченності. — Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1973, № 8.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К., «Наук. думка», 1968.

Львовский сельскохозяйственный институт

Поступила в редколлегию
3. X 1974 г.

УДК 539. 3

Н. М. Власов, В. С. Колесов, И. И. Федик

ВЛИЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ДИФфуЗИОННЫЙ РОСТ ПОР

Поведение материалов в условиях повышенных температур во многом зависит от наличия в них макроскопических дефектов. Эволюция последних может в существенной степени определять высокотемпературные процессы,

протекающие в твердых телах. Работы [1, 4—7], посвященные диффузионной подвижности включений, выполнены без учета локальных напряжений в окрестности дефекта на кинетику диффузии точечных дефектов. В настоящей работе изучается влияние пластических деформаций в окрестности газовой поры на изменение ее объема вследствие диффузионного потока вакансий.

Предположим, что пора представляет собой идеальную сферу радиуса R и соседние поры не взаимодействуют между собой. Предположим также, что давление p газа в поре столь велико, что в ее окрестности возникают пластические деформации. В рамках идеальной пластичности [8] для потенциала взаимодействия вакансий с полем напряжений в окрестности поры имеем следующее выражение:

$$V = \frac{\omega \sigma_{II}}{3}, \quad (1)$$

где

$$\sigma_{II} = \begin{cases} 6\sigma_0 \ln \frac{r}{\rho}, & R \leq r \leq \rho, \\ 0, & \rho \leq r < \infty. \end{cases}$$

Здесь σ_0 — предел текучести материала; ω — изменение объема кристалла при введении одной вакансии; ρ — радиус пластической области, определяемый из уравнения

$$2 \ln \frac{\rho}{R} - \frac{p}{\sigma_0} + \frac{2}{3} = 0.$$

Диффузионное перераспределение вакансий около поры с учетом (1) описывается системой дифференциальных уравнений при соответствующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_1}{\partial r^2} + \frac{2+\mu}{r} \frac{\partial C_1}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} C_1 &= \frac{1}{D} \frac{\partial C_1}{\partial t}, & R \leq r \leq \rho, \\ \frac{\partial^2 C_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C_2}{\partial r} &= \frac{1}{D} \frac{\partial C_2}{\partial t}, & \rho \leq r < \infty, \quad \mu = \frac{2\omega\sigma_0}{kT}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$C_1 = C_2 = C_0 \text{ при } t = 0;$$

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 e^{-\frac{\omega p}{kT}} \text{ при } r = R, \quad C_1 = C_2 \text{ и } \frac{\partial C_1}{\partial r} + \frac{\mu}{r} C_1 = \\ &= \frac{\partial C_2}{\partial r} \text{ при } r = \rho, \quad C = C_0 \text{ при } r = \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Физический смысл условий (3) очевиден. В начальный момент времени концентрация вакансий в окрестности поры постоянна и равна средней концентрации вакансий C_0 . После образования зоны пластичности (скорость этого процесса значительно больше скорости диффузионного перераспределения вакансий) возникает дополнительный поток вакансий, обусловленный потенциалом взаимодействия (1), причем на упругопластической границе концентрация вакансий и диффузионный поток непрерывны. Условие при $r = R$ означает, что для удаления атома с поверхности поры необходимо совершить работу только против сил нормального давления.

Построение решения, сформулированной задачи довольно трудоемко, поэтому представляет интерес переход к ее приближенной постановке, когда исследуется распределение вакансий лишь в области $R \leq r \leq \rho$:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2+\mu}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} C = \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C &= C_0 \text{ при } t = t_0, \quad C = C_0 e^{-\frac{\omega p}{kT}} \text{ при } r = R, \\ C &= C_0 \text{ при } r = \rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что максимальное отклонение $\Delta = \frac{C_1 - C}{C_1}$ решений этих задач будет достигаться в точке $r = \rho$ на стационарном режиме. На рис. 1 показана зависимость Δ_{\max} от величин μ и κ , где безразмерный параметр κ определяется из соотношения $\rho = \kappa \sigma_0$ ($\kappa \geq \frac{2}{3}$). Хотя, как следует из графиков, отклонение Δ_{\max} может быть и весьма значительным, для качественного исследования поведения поры в поле пластических деформаций можно ограничиться рассмотрением задачи (4) — (5).

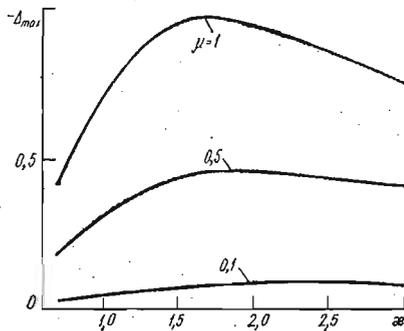


Рис. 1

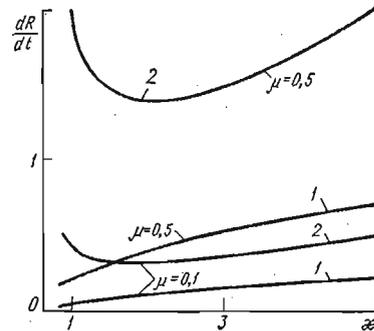


Рис. 2

Для нахождения решения задачи (4) — (5) воспользуемся методом Фурье [3]. Введем безразмерные координаты $\eta = r/R$, $\tau = Dt/R^2$ и положим $C = C^* + C^{**}$, где C^{**} является стационарным решением

$$\frac{C^*}{C_0} = A\eta^{-\mu} + B\eta^{-1},$$

$$A = \frac{\eta_0^{-1} e^{-\frac{\kappa\mu}{2}} - 1}{\eta_0^{-1} - \eta_0^{-\mu}}, \quad B = \frac{1 - \eta_0^{-\mu} e^{-\frac{\kappa\mu}{2}}}{\eta_0^{-1} - \eta_0^{-\mu}}, \quad \eta_0 = \frac{\rho}{R}. \quad (6)$$

Тогда функция C^* будет решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial \eta^2} + \frac{2 + \mu}{\eta} \frac{\partial C^*}{\partial \eta} + \frac{\mu}{\eta^2} C^* = \frac{\partial C^*}{\partial \tau}, \quad (7)$$

$$C^*|_{\eta=1} = C^*|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad C^*|_{\tau=0} = C_0 - C^{**}(0, \eta) = f(\eta). \quad (8)$$

В соответствии с процедурой разделения переменных представим C^* в форме произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, и подставим в (7). После некоторых преобразований получим

$$C^* = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\eta) e^{-\lambda_n^2 \tau},$$

где Φ является решением уравнения

$$\Phi'' + \frac{2 + \mu}{\eta} \Phi' + \left(\lambda^2 + \frac{\mu}{\eta^2} \right) \Phi = 0 \quad (9)$$

и имеет вид [3]

$$\Phi(\eta) = \eta^{\nu-1} \left\{ aJ_{\nu}(\lambda\eta) + bN_{\nu}(\lambda\eta) \right\}, \quad \nu = \frac{1 - 2\mu}{2}.$$

Здесь $J_{\nu}(x)$, $N_{\nu}(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

Удовлетворяя граничным условиям (8) и учитывая формулу (6), находим решение задачи (4) — (5):

$$C = A\eta^{-\mu} + B\eta^{-1} + \eta^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_{\nu}(\lambda_n \eta) e^{-\lambda_n^2 \tau}, \quad (10)$$

$$Z_{\nu}(\lambda_n \eta) = J_{\nu}(\lambda_n \eta) - \frac{J_{\nu}(\lambda_n)}{N_{\nu}(\lambda_n)} N_{\nu}(\lambda_n \eta),$$

причем λ_n — положительные корни уравнения

$$J_\nu(\lambda\eta_0) N_\nu(\lambda) - J_\nu(\lambda) N_\nu(\lambda\eta_0) = 0,$$

а коэффициенты a_n определяются из граничного условия (8), т. е. из разложения

$$1 - A\eta^{-\mu} - B\eta^{-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(\lambda_n \eta).$$

Приведем уравнение (9) к самосопряженному виду, получаем, что функции $\Phi_n(\lambda_n \eta)$ ортогональны на отрезке $[1, \eta_0]$ с весом $\eta^{2+\mu}$. Тогда

$$a_n = \frac{\int_1^{\eta_0} (1 - A\eta^{-\mu} - B\eta^{-1}) \eta^{2+\nu} Z_\nu(\lambda_n \eta) d\eta}{\int_1^{\eta_0} \eta Z_\nu^2(\lambda_n \eta) d\eta}.$$

Теперь стало возможным проанализировать поведение поры. В силу центральной симметрии поля вакансий диффузионного перемещения поры как целого наблюдаться не будет, но будет изменяться ее объем. Скорость изменения радиуса поры определяется формулой [1]

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\omega ND}{R} \left[\frac{dC}{d\eta} + \mu \frac{C}{\eta} \right]_{\eta=1},$$

где N — число атомов кристалла в единице объема; D — коэффициент диффузии вакансий. Подставляя в это выражение значение концентрации (10), после несложных преобразований получаем

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\omega NDC_0}{R} \left\{ B(\mu - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n Z_{\nu+1}(\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau} \right\}.$$

Из расчетов следует, что стационарное значение скорости изменения радиуса поры достигается быстро $\tau \sim 5 \cdot 10^{-2}$ и поэтому вклад неустановившегося процесса в величину $\frac{dR}{dt}$ незначителен. На рис. 2 показана зависимость скорости изменения радиуса поры от параметров μ и κ без учета (кривые 1) и с учетом (кривые 2) пластической деформации. Видно, что наличие зоны пластичности в окрестности поры ускоряет диффузионный поток вакансий, т. е. скорость изменения радиуса поры существенно возрастает по сравнению со случаем, когда пластические деформации отсутствуют. Из этого рисунка видно также, что с увеличением зоны пластичности скорость изменения радиуса поры возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гегузин Я. Е., Кривоглаз М. А. Движение макроскопических включений в твердых телах. М., «Металлургия», 1971.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.
4. Косевич А. М., Саралидзе З. К., Слезов В. В. Диффузионный рост пор и призматических дислокационных петель при наличии объемных источников точечных дефектов. — ЖЭТФ, 1967, 52, № 4, с. 1073—1080.
5. Кривоглаз М. А., Осиповский М. Е. К теории диффузионного движения пор в твердых телах. — ФММ, 1967, 23, № 6, с. 988—998.
6. Любов Б. Я., Соловьев В. А. Расчет скорости роста пор по границам зерен под действием растягивающих напряжений. — ФТТ, 1967, № 9, с. 3388—3394.
7. Саралидзе З. К., Слезов В. В. К теории коалесценции пор с газом. — ФТТ, 1965, № 7, с. 1605—1611.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высш. школа», 1969.

Москва

Поступила в редколлегию
22.X 1975 г.