Следует отметить, что в работах [1, 2, 7, 8] решены задачи о совместном кручении цилиндра и полупространства. В граничных точках спая основания цилиндра с полупространством касательные напряжения $\tau_{\theta z}$ также имеют степенную особенность вида $(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}+p}$. Параметр p удовлетворяет уравнению

$$\sin \pi p = \frac{1}{1+Q_i} \quad (i = 5,\ 6), \tag{26}$$

где

$$Q_5 = G/G^1, \quad Q_6 = \sqrt{A_{44}A_{66}/A^1_{44}A^1_{66}} \tag{27}$$

соответственно в изотропном и трансверсально-изотропном случаях материалов; G, G^1 — модули сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М.* Совместное кручение стержня и полупространства.— Прикладная механика, 1967, 3, № 2.
2. *Гриліцький Д. В., Кізима Я. М.* Сумісне кручення круглого циліндричного стержня і півпростору для часткового випадку анізотропії.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1967, № 3.
3. *Кизыма Я. М.* Осесимметричная задача о давлении упругого цилиндра на упругое полупространство.— Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 4.
4. *Кизыма Я. М.* Симметричные задачи о контактном взаимодействии упругого цилиндра и упругого полупространства.— В кн.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М., НИИ МАШ, 1969.
5. *Кизыма Я. М.* Давление упругого цилиндра на упругий слой конечной толщины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
6. *Кізима Я. М.* Осесиметрична контактна задача для циліндра і півпростору у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, № 2.
7. *Freeman N. J., Keer L. M.* Torsion of cylindrical rod welder an elastic half space.— Trans. ASME, 1967, 34, N 3.
8. *Keer L. M., Freeman N. J.* Torsion of a finite elastical rod partially bonden to an elastic half space.— Quart.— Appl. Math., 1969, 26, N 4.
9. *Srivistav R. P.* Dual series relation — II. Dual relations involving Dini series.—Pros. Roy. Soc. of Edinburgh. Ser. A, 1964, 66.
10. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary condicions in angular corners of plates in extension.— Appl. Mech., 1952, 19, 4.
11. *Williams M. L.* On the Stress distribution an the buse of stacionary crack.— J. Appl. Mech., 1957, 24, 1.

Тернопольский финансово-экономический институт

Поступила в редколлегию 15.VIII 1975 г.

УДК 599. 377

И. А. Нищенко

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ ОДИНАКОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Рассмотрим задачу термоупругости для бесконечной области, ослабленной бесконечным рядом одинаковых криволинейных отверстий. Расстояние между центрами двух соседних отверстий равно l. В случае пластинки считаем, что ее торцевые плоскости теплоизолированы. Через поверхности, ограничивающие область, происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. На бесконечности задан однородный тепловой поток интенсивности q, направленный под углом α к оси Ox.

Внешнее силовое поле отсутствует.

Начало системы координат поместим в центр одного из отверстий, которое назовем основным, а ограничивающий его контур обозначим через L_0. В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать, что оно симметрично относительно осей координат.

Учитывая, что $T = \operatorname{Re} f(z)$, где $f(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$, задача термоупругости, на основании работ [2—4], сводится к определению функций $f(z)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ из интегральных соотношений

$$\lambda_t \int_{L_j} F(t)\, d\,[f(t) - \overline{f(t)}] + \alpha_п \int_{L_j} [f(t) + \overline{f(t)} - 2T_c]\, F(t)\, e^{-i\beta} dt = 0,$$

$$\int_{L_j} F(t)\,\Phi(t)\, dt - \int_{L_j} t\overline{\Phi(t)}\, dF(t) + \int_{L_j} F(t)\,\overline{\Psi(t)}\, d\bar{t} =$$

$$= k \int_{L_j} F(t)\, f(t)\, dt - k \int_{L_j} t\overline{f(t)}\, dF(t), \qquad (1)$$

$$\int_{L_j} F(t)\,\overline{\Phi(t)}\, d\bar{t} - \int_{L_j} \bar{t}\Phi(t)\, dF(t) + \int_{L_j} F(t)\,\Psi(t)\, dt =$$

$$= k \int_{L_j} F(t)\,\overline{f(t)}\, d\bar{t} - k \int_{L_j} \bar{t} f(t)\, dF(t),$$

$$f'(z) = -\frac{q}{\lambda_t} e^{-i\alpha} \quad |z| \to \infty, \qquad \int_{L_j} \Phi(t)\, dt = 0 \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где λ_t — коэффициент теплопроводности; $\alpha_п$ — коэффициент теплоотдачи; $T_c = \text{const}$ — температура внешней среды; $k = \frac{\alpha_t E}{4}$ (для обобщенного плоского напряженного состояния); $k = \frac{\alpha_t E}{4(1-\nu)}$ (для плоской деформации); α_t — температурный коэффициент линейного расширения; $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ — комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили; β — угол между нормалью к контуру L_j и осью Ox; $F(z)$ — произвольная голоморфная функция. Последнее из соотношений выражает условия однозначности смещений.

Функции $f(z)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ можно представить в виде [1,4]

$$f(z) = \beta_0 \frac{z}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{[\zeta_0(z)]^k} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left\{ \frac{1}{[\zeta_n(z - nl)]^k} + \frac{1}{[\zeta_{-n}(z + nl)]^k} \right\},$$

$$\Psi(z) = k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{[\zeta_0(z)]^k} + k \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_k \left\{ \frac{1}{[\zeta_n(z - nl)]^k} + \frac{1}{[\zeta_{-n}(z + nl)]^k} \right\},$$

$$\Phi(z) = kf(z) + k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{[\zeta_0(z)]^k} + k \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left\{ \frac{1}{[\zeta_n(z - nl)]^k} + \right. \qquad (2)$$

$$\left. + \frac{1}{[\zeta_{-n}(z + nl)]^k} \right\},$$

где $\beta_0 = -\frac{qR}{\lambda_t} e^{-i\lambda}$, α_n, A_n, B_n — постоянные коэффициенты, а переменные ζ_n связаны с переменной z зависимостью

$$z = R\omega_n(\zeta_n) = R\left(\zeta_n + \frac{m}{\zeta_n^N}\right) + nl \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$(N = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (3)$$

($N = 1$ соответствует область с эллиптическими отверстиями, а $N = 3$, $m = \pm \frac{1}{9}$ — область с квадратными отверстиями).

В равенстве (2) первые суммы представляют функции, голоморфные вне основного отверстия, а вторые суммы — функции, голоморфные внутри основного отверстия. Если последние разложить в сходящийся ряд по малому параметру $\varepsilon' = \frac{R}{l}$ и сохранить в этих разложениях члены, содержащие множители ε в степени не выше четвертой, то получим

$$f(z) = \beta_0 \frac{z}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{[\zeta_0(z)]^k} - 2\lambda_2\varepsilon^2\alpha_1 \frac{z}{R} - 2\lambda_4\varepsilon^4\left(\alpha_1 \frac{z^3}{R^3} + 3\alpha_3 \frac{z}{R}\right),$$

$$\Psi(z) = k\Psi^*(z) - 2k\lambda_2\varepsilon^2 B_1 \frac{z}{R} - 2k\lambda_4\varepsilon^4\left(B_1 \frac{z^3}{R^3} + 3B_3 \frac{z}{R}\right), \tag{4}$$

$$\Phi(z) = kf(z) + k\Phi^*(z) - 2k\lambda_2\varepsilon^2 A_1 \frac{z}{R} - 2\lambda_4\varepsilon^4 k\left(A_1 \frac{z^3}{R^3} + 3A_3 \frac{z}{R}\right).$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{[\zeta_0(z)]^k}, \quad \Psi^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{[\zeta_0(z)]^k}, \quad \lambda_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^{2k}}, \tag{5}$$

Использовав разложение для $f(z)$ и выполнив интегрирование в первом из соотношений (1), получим бесконечную квазирегулярную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_n:

$$H_j\bar{\alpha}_j + \sum_{k=1,3}^{\infty} (\alpha_k h_{k+j} + \bar{\alpha}_k h_{j-k}) + 2\varepsilon^2 [(H\delta_{j,1} - c_{1,j})(\lambda_2\alpha_1 + 3\lambda_4\varepsilon^2\alpha_3) -$$
$$- (\lambda_2\bar{\alpha}_1 + 3\lambda_4\varepsilon^2\bar{\alpha}_3)(mNH\delta_{j,N} + a_{1,j})] + 2\lambda_4\varepsilon^4 \{[3H\delta_{j,3} - c_{3,j} +$$
$$+ 3mH(2 - N)\delta_{j,2-N}]\alpha_1 - [3mH(N-2)\delta_{j,N-2} + 3HNm^3\delta_{j,3N} +$$
$$+ a_{3,j} + 3Hm^2(2N-1)\delta_{j,2N-1}]\bar{\alpha}_1\} = \beta_0(H\delta_{j,1} - c_{1,j}) -$$
$$- \bar{\beta}_0(mNH\delta_{j,N} + a_{1,j}) \qquad (j = 1, 3, 5, \ldots), \tag{6}$$

где

$$a_{n,j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [\overline{\omega_0(\sigma)}]^n \sigma^{-j} |\omega_0'(\sigma)| \frac{d\sigma}{\sigma}; \quad c_{n,j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [\omega_0(\sigma)]^n \sigma^{-j} |\omega_0'(\sigma)| \frac{d\sigma}{\sigma},$$

$$h_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \sigma^k |\omega_0'(\sigma)| \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad H = \frac{\lambda_t}{\alpha_n R}, \quad \delta_{j,n} = \begin{cases} 1 & (n = j), \\ 0 & (n \neq j). \end{cases}$$

Исходя из разложений (2) и интегральных соотношений (1), путем интегрирования по контуру L_0, умножения на ζ_0^{-j-1} и последующего суммирования по j, можно получить функции $\Phi^*(z)$, $\Psi^*(z)$ в явном виде.

В случае области с эллиптическими отверстиями получаем

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\omega_0'[\zeta_0(z)]} \left\{\frac{m\alpha_1 + A_3}{[\zeta_0(z)]^3} - \frac{\alpha_1}{\zeta_0(z)} + \frac{2\lambda_4\varepsilon^4[(1 + m^4)\alpha_1 + 4m\bar{\alpha}_1]}{[\zeta_0(z)]^5}\right\},$$

$$\Psi^*(z) = -\frac{1}{\omega_0'[\zeta_0(z)]} \left\{\frac{\bar{\alpha}_1}{\zeta_0(z)} - \frac{B_3 + m\alpha_1 + 2(\alpha_1 - mA_3)}{[\zeta_0(z)]^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta_0}\left[\omega_0\left(\frac{1}{\zeta_0(z)}\right)\Phi^*(z)\right] - \frac{2\lambda_4\varepsilon^4[(1 + m^4)\bar{\alpha}_1 + 4m^3\alpha_1]}{[\zeta_0(z)]^5}\right\}. \tag{7}$$

Неизвестные коэффициенты A_3, B_3 определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$A_3(1 + 6m^2\lambda_4\varepsilon^4) + 12m\lambda_4\varepsilon^4\bar{A}_3 + 6\lambda_4\varepsilon^4\bar{B}_3 = 4\bar{\alpha}_1\varepsilon^2[m\lambda_2 + \lambda_4\varepsilon^2(1 + 3m^2)] +$$
$$+ \alpha_1[2\varepsilon^2(1 + m^2)(\lambda_2 + 2m\lambda_4\varepsilon^2) - m],$$

$$6\lambda_4\varepsilon^4 A_3 - 2m(1 - 6\lambda_4\varepsilon^4)\bar{A}_3 + (1 + 6m^2\lambda_4\varepsilon^4)\bar{B}_3 = \alpha_1[-m +$$
$$+ 2\varepsilon^2(1 + m^2)(\lambda_2 + 2m\lambda_4\varepsilon^2)] - \bar{\alpha}_1[2 - 4m\lambda_2\varepsilon^2 - 4m^2\lambda_4\varepsilon^4(3 + m^2)]. \tag{8}$$

В случае области, ослабленной одинаковыми квадратными отверстиями, указанные функции имеют вид

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\omega_0'[\zeta_0(z)]}\left\{\frac{A_3}{[\zeta_0(z)]^3} - \frac{\alpha_1}{\zeta_0(z)} + 2\lambda_4\varepsilon^4\left[\frac{1+6m^2}{[\zeta_0(z)]^5} + \frac{8m^3}{[\zeta_0(z)]^9} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3m^4}{[\zeta_0(z)]^{13}}\right] + \frac{6\lambda_2\varepsilon^2 m^2\alpha_1}{[\zeta_0(z)]^7} + \frac{8m^2\varepsilon^2(\lambda_2\bar{\alpha}_1 - 3\lambda_4\varepsilon^2\bar{A}_3)}{[\zeta_0(z)]^5} + \frac{6m\lambda_4\varepsilon^4(2\bar{\alpha}_1 - 3mA_3)}{[\zeta_0(z)]^7}\right\}, \quad (9)$$

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{\omega_0'[\zeta_0(z)]}\left\{\frac{2\lambda_2\varepsilon^2(1+2m)\bar{\alpha}_1 - \bar{A}_3(1+6\lambda_4\varepsilon^4) - 6\lambda_4\varepsilon^4(B_3 - 2m\alpha_1 - 2m^3\alpha_1)}{[\zeta_0(z)]^3} + \right.$$

$$+ \frac{12\alpha_1\varepsilon^4\lambda_4(3m^2+m^4-m) - 18m^2\lambda_4\varepsilon^4(\bar{A}_3 - B_3)}{[\zeta_0(z)]^7} + \frac{20\lambda^4\varepsilon^4 m^3\bar{\alpha}_1}{[\zeta_0(z)]^{11}} -$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\zeta_0}\left[\omega_0\left(\frac{1}{\zeta_0(z)}\right)\Phi^*(z)\right]\right\} + \bar{\Phi}^*(z).$$

Коэффициенты A_3, B_3 находим из системы линейных уравнений

$$\begin{gathered}A_3(1+12m\lambda_4\varepsilon^4) + 6\lambda_4\varepsilon^4\bar{B}_3 = 2\lambda_2\varepsilon^2(1+2m)\alpha_1 + \\ + \bar{\alpha}_1[4\lambda_4\varepsilon^4(1+3m^2) - 2m], \\ 6\lambda_4\varepsilon^4(A_3 + 4m^2\bar{A}_3) - (1+12\bar{m}\lambda_4\varepsilon^4)\bar{B}_3 = \alpha_1[2\lambda_2\varepsilon^2(1+2m) + \\ + 4m\lambda_4\varepsilon^4(1+6m^2) - 6m - 2] + \bar{\alpha}_1[8m^2\lambda_2\varepsilon^2 + 12m\lambda_4\varepsilon^4(1+m^2)].\end{gathered} \quad (10)$$

Кольцевые напряжения, возникающие в пластинке вблизи контура L_0, определяем по формуле

$$\sigma_\theta = \alpha_t E \operatorname{Re}\left[\Phi^*(z) + 2\lambda_2\varepsilon^2\alpha_1\frac{z}{R} - 2\lambda_4\varepsilon^4\left(3A_3\frac{z}{R} - \alpha_1\frac{z^3}{R^3}\right)\right]. \quad (11)$$

Таблица 1

θ	$N=1$			$N=3,\ m=-\frac{1}{9}$		
	$\sigma_\theta^{(0)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_\theta^{(0)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$
0	1,5	—0,025	0	0,583	0,269	0
$\frac{\pi}{18}$	1,358	0,191	0,026	0,622	0,294	—0,036
$\frac{\pi}{9}$	1,044	0,482	0,071	0,755	0,389	0,135
$\frac{\pi}{6}$	0,742	0,689	0,177	1,032	0,629	0,456
$\frac{2\pi}{9}$	0,513	0,749	0,345	1,350	1,054	1,256
$\frac{\pi}{4}$	—	—	—	1,096	1,166	1,677
$\frac{5\pi}{18}$	0,349	0,691	0,611	1,030	1,069	1,841
$\frac{\pi}{3}$	0,231	0,558	0,981	0,452	0,615	1,458
$\frac{7\pi}{18}$	0,140	0,386	1,446	0,180	0,304	1,083
$\frac{4\pi}{9}$	0,067	0,196	1,922	0,065	0,126	0,894
$\frac{\pi}{2}$	0	0	2,138	0	0	0,839

Числовые примеры рассматривались для области, ослабленной одинаковыми эллиптическими $\left(N = 1,\ m = \frac{1}{3}\right)$ или квадратными $(N = 3,$ $m = -\frac{1}{9}\Big)$ отверстиями при ε=0,3. Большая ось эллиптических отверстий во всех примерах параллельна тепловому потоку.

Значения кольцевых напряжений $\sigma_\theta^{(j)}$, распределенных около контура L_0, приведены в табл. 1 в долях $\frac{\alpha_t EqR}{\lambda_t}\ r_j$. Напряжения $\sigma_\theta^{(1)}$ соответствуют случаю, когда тепловой поток параллелен оси Ox $(\alpha = 0)$, а $\sigma_\theta^{(2)}$ — при тепловом потоке, параллельном оси $Oy\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Для сравнения даны напряжения $\sigma_\theta^{(0)}$, которые возникают в тех же точках области с одним отверстием. Значения соответствующих коэффициентов r_j в зависимости от величины H подбираются из табл. 2.

Таблица 2

N	r	H						
		0	0,5	1	2	5	10	∞
N=1	r_0	—1,289	—0,573	—0,241	0,076	0,378	0,511	0,667
	r_1	—0,916	—0,486	—0,224	0,078	0,429	0,608	0,972
	r_2	2,165	0,699	0,260	—0,074	—0,338	—0,440	—0,507
N=3	r_0	—1,017	—0,358	—0,024	0,314	0,655	0,811	1,00
	r_1	—0,781	—0,324	—0,023	0,346	0,814	1,089	1,422
	r_2	1,458	0,401	0,024	—0,287	—0,548	—0,654	—0,771

Анализ числовых результатов показывает, что при $\alpha = 0$ $(\varepsilon = 0{,}3)$ напряжения σ_θ меньше, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(\varepsilon = 0{,}3)$ они значительно больше, чем соответствующие напряжения в области с одним отверстием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодамианский А. С.* О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Саратов. Изд-во Сарат. ун-та, 1964.
2. *Мартынович Т. Л., Нищенко И. А.* К решению плоской задачи термоупругости для двусвязных областей.— Прикладная механика, 1972, 8, № 7.
3. *Мартинович Т. Л., Ніщенко І. О., Махмуд Аллам.* Температурні напруження біля криволінійних отворів, викликані однорідним тепловим потоком на нескінченності.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1973, № 8.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. К., «Наук. думка», 1968.

Львовский сельскохозяйственный институт

Поступила в редколлегию 3.X 1974 г.

УДК 539. 3

Н. М. Власов, В. С. Колесов, И. И. Федик

ВЛИЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ДИФФУЗИОННЫЙ РОСТ ПОР

Поведение материалов в условиях повышенных температур во многом зависит от наличия в них макроскопических дефектов. Эволюция последних может в существенной степени определять высокотемпературные процессы,