Функция, удовлетворяющая уравнению (27) и граничному условию (28), имеет вид

$$T = T_c + \frac{Q(R^2 - r^2)}{4\varkappa}. \tag{29}$$

При заданном температурном поле в длинном цилиндрическом теле возникает плоская деформация. В случае отсутствия контурных усилий при свободных торцевых поверхностях цилиндра кольцевые $\sigma_{\theta\theta}$ и радиальные σ_{rr} напряжения определяются формулами

$$\sigma_{\theta\theta} = -E_Q\left[1 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2\right], \quad \sigma_{rr} = -E_Q\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right], \tag{30}$$

где $E_Q = \frac{\alpha EQR^2}{48(1-\nu)\varkappa}$.

Распределение кольцевых (сплошная линия) и радиальных (штриховая) напряжений по радиусу показано на рис. 5. Максимальное значение радиальных напряжений в два раза меньше максимального значения кольцевых. При $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ $1/град$, $\nu = 0{,}3$, $\varkappa = 100$ $н/сек \cdot град$, $E = 3 \cdot 10^{11}$ $н/м^2$, $R = 10^{-4}$ $м$, $Q = 2{,}9 \cdot 10^9 дж/м^3 \cdot сек$ величина $\max \sigma_{\theta\theta} = 7{,}8 \cdot 10^4$ $н/м^2$, что на четыре порядка ниже от максимальных динамических тепловых напряжений.

Таким образом, при одновременном воздействии на термоприемник мгновенно изменяющихся высоких температур и реакторного облучения определяющими оказываются динамические тепловые напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниловская В. И.* Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы.— ПММ, 1950, 14, № 3, с. 316—318.
2. *Даниловская В. И.* Динамические температурные напряжения в бесконечной плите.— Инж. физ. журн., 1961, 1, № 4, с. 86—94.
3. *Дарков А. В.*, *Кузнецов В. И.* Строительная механика. М., Трансжелдориздат, 1956.
4. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 18.IX 1974 г.

УДК 539. 377

Я. М. Кизыма

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ В НАПРЯЖЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРНОМ ГРАДИЕНТЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДР—ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В работах [3—6] решены задачи о давлении упругого цилиндра радиуса R и конечной длины L на полупространство и слой конечной толщины H. В последнее время получено также решение температурных и термоупругих задач для системы цилиндр — полупространство. В граничных точках области контакта упомянутых задач нормальные напряжения σ_z и температурный градиент $\partial T/\partial z$ имеют особенности. Так как окончательные формулы для данных величин получены в виде функциональных рядов, то особенность проявляется в их расхождении при $r \to R$.

На основании исследований [10, 11] можно заключить, что особенность названных величин должна быть степенной порядка $O(\rho_R^{1-\lambda})$, где ρ_R — расстояние от точки тела до граничной точки области контакта; λ — параметр, определяемый из некоторого трансцендентного уравнения и зависящий от упругих постоянных контактирующих тел и их конфигурации.

Покажем, что полученные решения [3—6] содержат степенную особенность, и выведем формулы для определения ее величины. Рассмотрим задачу о давлении упругого цилиндра на полупространство в случае изотропных материалов. В данном случае нормальные контактные напряжения σ_z определяются через некоторую функцию $F(\eta)$ по формуле

$$\sigma_z = \frac{2b_3^1}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho)\, d\eta. \tag{1}$$

Здесь $J_0(\eta\rho)$ — функция Бесселя первого рода действительного аргумента; $F(\eta)$ — функция, определяемая из парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) J_0(\eta\rho)\, d\eta = \varepsilon b_4^1 (C_0 - 1) + \frac{\varepsilon (b_4^1)^2}{b_4} \sum_{k=1}^\infty \frac{C_k J_0(\mu_k\rho)}{\mu_k} \qquad (\rho < 1),$$

$$\int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho)\, d\eta = 0 \qquad (\rho > 1), \tag{2}$$

а C_n — постоянные, определяемые из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и связанные с функцией $F(\eta)$ формулами

$$C_0 = -\frac{4lb_3^1}{b_1 b_3 (2b_1 + 3b_2)} \int_0^\infty \eta^{-1} F(\eta) J_1(\eta)\, d\eta,$$

$$C_k = -\frac{2b_3^1}{\varepsilon b_3 b_4^1 J_0^2(\mu_k)} \int_0^\infty F(\eta)\, d\eta \times$$

$$\times \int_0^1 \rho J_0(\eta\rho) J_0(\mu_k\rho)\, d\rho + S_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{3}$$

В формулах (1)—(3) введены обозначения

$$S_k = \frac{16 l^4 \pi^3 \mu_k^2}{J_0(\mu_k)} \sum_{n=1}^\infty \frac{n^3 I_1^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)}{\omega_n (\mu_k^2 l^2 + \pi^2 n^2)^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{C_m J_0(\mu_m)}{\mu_m (\pi^2 n^2 + l^2 \mu_m^2)^2}, \tag{4}$$

$$\omega_m = -\frac{l}{\pi m} (2b_1 + 2b_2) I_1^2\left(\frac{\pi m}{l}\right) + \frac{\pi m}{l}\left[I_0^2\left(\frac{\pi m}{l}\right) - I_1^2\left(\frac{\pi m}{l}\right)\right],$$

$l = L/R$, $\rho = r/R$; ε — вертикальное перемещение свободного торца цилиндра; μ_k — корни уравнения $J_1(\mu) = 0$; $I_i(x)$ $(i = 1,\ 2)$ — функции Бесселя первого рода мнимого аргумента;

$$b_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b_3 = \lambda + \mu, \quad b_4 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \tag{5}$$

λ, μ — коэффициенты Ляме. Здесь и далее верхним индексом «1» обозначены упругие постоянные, относящиеся к полупространству, а аналогичные величины для цилиндра оставлены без индексов.

Введем функцию $\varphi(\eta)$ соотношением

$$F(\eta) = \eta \int_0^1 t^{-1} \varphi(t) \cos \eta t\, dt. \tag{6}$$

Подставляя значение функции $F(\eta)$ в формулы (3) и последовательно (6) и (3) в (2), второе уравнение (2) удовлетворяем тождественно, а с первого получаем интегральное уравнение Абеля относительно функции $\varphi(\eta)$:

$$\int_0^\rho \frac{\varphi(t)\, dt}{t(\rho^2 - t^2)^{1/2}} = g(\rho), \tag{7}$$

где

$$g(\rho) = -\varepsilon b_4^1 - \frac{4lb_3^1 b_4^1}{b_1 b_3 (2b_1 + 3b_2)} \int_0^1 \eta^{-1} \varphi(\eta) J_1(\eta) d\eta -$$

$$-\frac{2b_3^1 b_4^1}{b_3 b_4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho)}{\mu_k J_0^2(\mu_k)} \int_0^1 t^{-1} \varphi(t) \cos \mu_k t dt + \frac{\varepsilon (b_4^1)^2}{b_4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho)}{\mu_k} S_k. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) выражается формулой

$$\varphi(t) = \frac{2t}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho) d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad (9)$$

которая после соответствующего интегрирования приводит к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = -\frac{2b_4^1 \varepsilon t}{\pi} - \frac{8lb_3^1 b_4^1 t}{\pi b_1 b_3 (2b_1 + 3b_2)} \int_0^1 u^{-1} \varphi(u) J_1(u) du -$$

$$-\frac{4t}{\pi} \frac{b_3^1 b_4^1}{b_3 b_4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_k t}{\mu_k J_0^2(\mu_k)} \int_0^1 u^{-1} \varphi(u) \cos \mu_k u du +$$

$$+\frac{2\varepsilon}{\pi} t \frac{(b_4^1)^2}{b_4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k \cos \mu_k u}{\mu_k}. \quad (10)$$

Согласно формулам (1) и (6) нормальное напряжение σ_z определяется по формуле

$$\sigma_z = 2 \frac{b_3^1}{R} \int_0^{\infty} \eta J_0(\eta\rho) d\eta \int_0^1 t^{-1} \varphi(t) \cos \eta t dt. \quad (11)$$

Чтобы выделить члены, дающие нерегулярную часть решения уравнения (10), первую бесконечную сумму в этом уравнении представим в интегральной форме. Используя результаты работы [9], получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_k t \cos \mu_k u}{\mu_k J_0^2(\mu_k)} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos ux \cos tx dx +$$

$$+\frac{\sqrt{ut}}{2} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{-1/2}(uy) I_{-1/2}(ty) y dy, \quad (12)$$

где $K_1(x)$ — функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Свободный член уравнения (10) дает значение контактных напряжений задачи о давлении штампа на упругое полупространство, т. е.

$$\sigma_z = -\frac{4b_3^1 b_4^1 \varepsilon}{\pi R} (1 - \rho^2)^{-1/2}. \quad (13)$$

Примем функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = Ct(1 - t^2)^p, \quad (14)$$

где C и p — некоторые постоянные. При данном значении C и p

$$\sigma_z = \frac{2\sqrt{2\pi} C \Gamma(1 + p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)} (1 - \rho^2)^{-1/2 + p}, \quad (15)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Выражение (15) показывает, что при таком задании функции $F(\eta)$ в окрестности граничных точек области контакта напряжения σ_z имеют особенность, обоснованную в работах [10, 11]. Подставляя (15) в (10), после соответствующего интегрирования и преобразования выделяем члены с множителем $(1-t)^{p-1}$. Окончательно получаем

$$2ptC(1-t^2)^{p-1} = -\frac{2}{\pi} C \frac{b_3^1 b_4^1}{b_3 b_4} t \left[\pi p t (1-t^2)^{p-1} - \right.$$
$$\left. - 2^{p-1}\Gamma(1+p)\Gamma(1-p)(1-t)^{p-1}\right] + R(p), \tag{16}$$

где

$$R(p) = \frac{2^{p-1}}{\pi} C\Gamma(1+p) \frac{b_3^1 b_4^1}{b_3 b_4} \int_0^\infty \left[\frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{p+\frac{1}{2}}(y) I_{\frac{1}{2}}(ty) y^{1-\varrho} dy - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{y^p} e^{-y(1-t)} \right] dy + \frac{2(b_4^1)^2}{\pi b_4} \sum_{k=1}^{\infty} S_k \sin \mu_k t \tag{17}$$

не содержит множителя $(1-t)^{p-1}$.

Определение особенности в напряжениях σ_z при $\rho \to 1$ эквивалентно определению такой же особенности в выражении (16) при $t \to 1$. Приравнивая в (16) коэффициенты при членах со множителем $(1-t)^{p-1}$, получаем

$$\sin \pi p = \frac{1}{1+Q_1}. \tag{18}$$

Здесь

$$Q_1 = E[1-(\sigma^1)^2]/E^1(1-\sigma^2); \tag{19}$$

E, σ — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Нетрудно показать, что

$$\frac{3}{4} < \frac{1-(\sigma^1)^2}{1-\sigma^2} < \frac{4}{3}. \tag{20}$$

Отсюда видно, что изменение коэффициента Пуассона на величину параметра p влияет незначительно. Если же $\delta = E/E^1$ изменяется от 0 до ∞, то величина p изменяется от $\frac{1}{2}$ до 0. Значения $p = \frac{1}{2}$ и $p = 0$ соответствуют граничным случаям задачи, а именно: $p = \frac{1}{2}$ — задаче об осевом сжатии стержня, а $p = 0$ — задаче о давлении жесткого штампа на полупространство.

В случае трансверсально-изотропных материалов особенность будет такой же, и для определения параметра p получаем уравнение

$$\sin \pi p = \frac{1}{1+Q_2}. \tag{21}$$

Здесь

$$Q_2 = \frac{A_{11}^1(\nu_1^1+\nu_2^1)}{A_{11}(\nu_1+\nu_2)} \frac{A_{11}A_{33}-A_{13}^2}{A_{11}^1 A_{33}^1 - (A_{13}^1)^2}, \tag{22}$$

где A_{ij} — модули упругости, а ν_1, ν_2 — определяются из уравнения

$$A_{11}A_{44}\nu^4 + [A_{13}(A_{13}+2A_{44}) - A_{11}A_{33}]\nu^2 + A_{33}A_{44} = 0. \tag{23}$$

При решении температурных задач для системы цилиндр — полупространство аналогичную особенность имеет температурный градиент $\partial T/\partial z$. Параметр p, характеризующий ее величину, определяется из уравнения

$$\sin \pi p = \frac{1}{1+Q_i} \quad (i = 1,\ 2). \tag{24}$$

Здесь

$$Q_3 = \lambda_z/\lambda_z^1, \quad Q_4 = \lambda_z\lambda^1/\lambda_z^1\lambda \tag{25}$$

соответственно в случае изотропных и трансверсально-изотропных материалов, где λ_z, λ_z^1 — коэффициенты теплопроводности в направлении оси $0z$; λ, λ^1 — отношение коэффициентов теплопроводности в направлении оси $0z$ и перпендикулярном к ней.

Следует отметить, что в работах [1, 2, 7, 8] решены задачи о совместном кручении цилиндра и полупространства. В граничных точках спая основания цилиндра с полупространством касательные напряжения $\tau_{\theta z}$ также имеют степенную особенность вида $(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}+p}$. Параметр p удовлетворяет уравнению

$$\sin \pi p = \frac{1}{1+Q_i} \quad (i = 5,\ 6), \tag{26}$$

где

$$Q_5 = G/G^1, \quad Q_6 = \sqrt{A_{44}A_{66}/A_{44}^1A_{66}^1} \tag{27}$$

соответственно в изотропном и трансверсально-изотропном случаях материалов; G, G^1 — модули сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М.* Совместное кручение стержня и полупространства.— Прикладная механика, 1967, **3**, № 2.
2. *Грилицький Д. В., Кізима Я. М.* Сумісне кручення круглого циліндричного стержня і півпростору для часткового випадку анізотропії.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1967, № 3.
3. *Кизыма Я. М.* Осесимметричная задача о давлении упругого цилиндра на упругое полупространство.— Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 4.
4. *Кизыма Я. М.* Симметричные задачи о контактном взаимодействии упругого цилиндра и упругого полупространства.— В кн.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М., НИИ МАШ, 1969.
5. *Кизыма Я. М.* Давление упругого цилиндра на упругий слой конечной толщины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
6. *Кізима Я. М.* Осесиметрична контактна задача для циліндра і півпростору у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, № 2.
7. *Freeman N. J., Keer L. M.* Torsion of cylindrical rod welder an elastic half space.— Trans. ASME, 1967, **34**, N 3.
8. *Keer L. M., Freeman N. J.* Torsion of a finite elastical rod partially bonden to an elastic half space.— Quart.—Appl. Math., 1969, **26**, N 4.
9. *Srivistav R. P.* Dual series relation — II. Dual relations involving Dini series.—Pros. Roy. Soc. of Edinburgh. Ser. A, 1964, **66**.
10. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary condicions in angular corners of plates in extension.— Appl. Mech., 1952, **19**, 4.
11. *Williams M. L.* On the Stress distribution an the buse of stacionary crack.— J. Appl. Mech., 1957, **24**, 1.

Тернопольский финансово-экономический институт

Поступила в редколлегию 15.VIII 1975 г.

УДК 599. 377

И. А. Нищенко

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ ОДИНАКОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Рассмотрим задачу термоупругости для бесконечной области, ослабленной бесконечным рядом одинаковых криволинейных отверстий. Расстояние между центрами двух соседних отверстий равно l. В случае пластинки считаем, что ее торцевые плоскости теплоизолированы. Через поверхности, ограничивающие область, происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. На бесконечности задан однородный тепловой поток интенсивности q, направленный под углом α к оси Ox.

Внешнее силовое поле отсутствует.

Начало системы координат поместим в центр одного из отверстий, которое назовем основным, а ограничивающий его контур обозначим через L_0. В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать, что оно симметрично относительно осей координат.