

Б. П. Галапац, В. Н. Юзевич

**О ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ
В ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ**

Расширение в последнее время области практических применений термоэлектричества требует дальнейшего развития аналитических исследований термоэлектрических явлений в электропроводных твердых телах. В данной работе на основе уравнений макроскопической модели электропроводных твердых растворов [3] изучается распределение электрических зарядов неоднородно нагретого электропроводного слоя толщины h и электростатическое поле в области слоя и в вакууме.

Область слоя $x > 0$ (рис. 1) занята электропроводным телом 1, которое характеризуется начальным электрическим потенциалом $\Phi_0^{(1)}$, а область $x < 0$ — электропроводным телом 2 с начальным электрическим потенциалом $\Phi_0^{(2)}$.

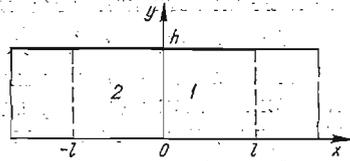


Рис. 1

Предполагается, что электрическая система тел состоит из положительно заряженной металлической решетки, в которой сосредоточена вся масса, и электронного газа.

Пусть тела 1 и 2 нагреваются по закону

$$t^{(1)} = T^{(1)} - T_0 = \begin{cases} t_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right), & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x \geq l; \end{cases}$$

$$t^{(2)} = T^{(2)} - T_0 = \begin{cases} t_1 \left(1 + \frac{x}{l}\right), & -l \leq x \leq 0, \\ 0, & x \leq -l, \end{cases} \quad (1)$$

где $t_1 = T_1 - T_0$ — отклонение температуры от начальной.

Распределение электрических зарядов и электростатическое поле в установившемся режиме в пренебрежении пондеромоторными силами и влиянием поля электрического потенциала на упругое состояние определяются решением следующих систем уравнений [3]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0^{(k)}}{\partial y^2} - \frac{\rho_{0k} C_k}{\epsilon_0} \varphi_0^{(k)} = 0, \quad \omega_0^{(k)} = C_k \varphi_0^{(k)},$$

$$\vec{E}_0^{(k)} = -\text{grad } \psi_0^{(k)}, \quad \psi_0^{(k)} = -\varphi_0^{(k)} + \text{const},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_t^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_t^{(k)}}{\partial y^2} - \frac{\rho_{0k} C_k}{\epsilon_0} \varphi_t^{(k)} = -\frac{\rho_{0k} \gamma_k C_k}{\epsilon_0} t^{(k)}, \quad \omega_t^{(k)} = C_k (\varphi_t^{(k)} - \gamma_k t^{(k)}),$$

$$\vec{E}_t^{(k)} = -\text{grad } \psi_t^{(k)}, \quad \psi_t^{(k)} = -\varphi_t^{(k)} - \frac{\eta_{tk}}{\lambda_k} T^{(k)} + \text{const}$$

в области слоя;

$$\vec{E}_0^{(0)} = -\text{grad } \psi_0^{(0)}, \quad \frac{\partial^2 \psi_0^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0^{(0)}}{\partial y^2} = 0, \quad \vec{E}_t^{(0)} = -\text{grad } \psi_t^{(0)},$$

$$\frac{\partial^2 \psi_t^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_t^{(0)}}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

в области вакуума;

$$\begin{aligned} \Omega_0^{(k)} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial (\psi_0^{(0)} - \psi_0^{(k)})}{\partial n}, \quad \Phi_0^{(k)} + \varphi_0^{(k)} = 0, \quad \psi_0^{(k)} = \psi_0^{(0)}, \\ \Omega_l^{(k)} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \psi_l^{(k)}}{\partial n}, \quad \Omega_l^{(0)} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial n}, \quad \varphi_l^{(k)} = 0, \quad \psi_l^{(k)} = \psi_l^{(0)} \end{aligned} \quad (4)$$

на поверхности раздела ($y = 0, h$) тело (k) — вакуум ($k = 1, 2$);

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)} + \varphi_0^{(1)} &= \Phi_0^{(2)} + \varphi_0^{(2)}, \quad \psi_0^{(1)} = \psi_0^{(2)}, \quad \frac{\partial \psi_0^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial x}, \\ \varphi_l^{(1)} &= \varphi_l^{(2)}, \quad \psi_l^{(1)} = \psi_l^{(2)}, \quad \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

на поверхности контакта ($x = 0$) электропроводных тел.

Здесь $\Phi_0^{(k)}$, $\rho_{0k}\omega_0^{(k)}$, $\Omega_0^{(k)}$, $\vec{E}_0^{(k)}$, $\vec{E}_0^{(0)}$ — отклонение электрического потенциала тела (k) от его начального значения $\Phi_0^{(k)}$, распределение объемных и поверхностных зарядов, напряженности электростатического поля в области тела (k) и в вакууме соответственно, вызванные контактом разнородных электропроводных тел, находящихся при однородной температуре; $\varphi_l^{(k)}$, $\rho_{0k}\omega_l^{(k)}$, $\Omega_l^{(k)}$, $\vec{E}_l^{(k)}$, $\vec{E}_l^{(0)}$ — характеризуют возмущения поля электрического потенциала, распределения объемных и поверхностных электрических зарядов, электростатического поля соответственно, возникающие при неоднородном нагреве контактирующих тел; ρ_{0k} — плотность распределения масс тела (k); $C_k = \left(\frac{\partial \omega^{(k)}}{\partial \varphi^{(k)}} \right)_{l^{(k)}}$ — удельная электроемкость; ε_0 — диэлектрическая постоянная; $\gamma_k = \left(\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial t^{(k)}} \right)_{\omega^{(k)}}$ — температурный коэффициент изменения электрического потенциала; η_{lk} — коэффициент, характеризующий термоэлектрические эффекты; λ_k — коэффициент электропроводности тела (k); \vec{n} — нормаль к поверхности слоя.

Функции, удовлетворяющие уравнениям (2), (3) и условиям (4), (5), имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(k)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{kn}}{\varepsilon_{kn}} + A_n^{(k)} e^{(-1)^k \sqrt{\varepsilon_{kn}} x} \right) \sin \frac{n\pi y}{h} - \Phi_0^{(k)}, \\ \psi_0^{(k)} &= -\varphi_0^{(k)} - \Phi_0^{(k)}, \quad \psi_0^{(0)} = 0, \quad \vec{E}_0^{(0)} = 0, \\ \varphi_l^{(k)} &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_{kn}}{\varepsilon_{kn}} + C_{1n}^{(k)} e^{\sqrt{\varepsilon_{kn}} x} + C_{2n}^{(k)} e^{-\sqrt{\varepsilon_{kn}} x} \right) \sin \frac{n\pi y}{h}, & |x| \leq l, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_{1n} e^{(-1)^k \sqrt{\varepsilon_{kn}} x} \sin \frac{n\pi y}{h}, & |x| \geq l, \end{cases} \\ \psi_l^{(k)} &= -\varphi_l^{(k)} - \frac{\eta_{lk}}{\lambda_k} t^{(k)} - \frac{(-1)^k}{2} \left(\frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} - \frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} \right) t_1, \\ \psi_l^{(0)} &= \frac{t_1}{\pi l} \left[\left(\frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} + \frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} \right) \left(x \operatorname{arctg} \frac{x}{y_*} - \frac{y_*}{2} \ln \frac{x^2 + y_*^2}{(x-l)^2 + y_*^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} (x-l) \operatorname{arctg} \frac{x-l}{y_*} - \frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} (x+l) \operatorname{arctg} \frac{x+l}{y_*} \right], \quad y_* = \begin{cases} y-h, & y \geq h, \\ |y|, & y \leq 0, \end{cases} \\ E_{lx}^{(0)} &= \frac{t_1 \eta_{l1}}{\pi l \lambda_1} \left[\operatorname{arctg} \frac{x-l}{y_*} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y_*} + \frac{\eta_{l2} \lambda_1}{\eta_{l1} \lambda_2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x+l}{y_*} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y_*} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$E_{ly}^{(0)} = \frac{t_1 \eta_{l1}}{2\pi l \lambda_1} \left[\ln \frac{x^2 + y_*^2}{(x-l)^2 + y_*^2} + \frac{\eta_{l2} \lambda_1}{\eta_{l1} \lambda_2} \ln \frac{x^2 + y_*^2}{(x+l)^2 + y_*^2} \right], \quad (6)$$

где $a_{kn} = \frac{2\rho_{0k} C_k \Phi_0^{(k)}}{\pi \varepsilon_0} \frac{1 - (-1)^n}{n}$, $b_{kn} = \frac{2\rho_{0k} \gamma_k t_1 C_k}{\pi \varepsilon_0} \left[1 + (-1)^k \frac{x}{l} \right] \frac{1 - (-1)^n}{n}$,

$$\varepsilon_{kn} = \frac{\rho_{0k} C_k}{\varepsilon_0} + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2, \quad A_n^{(k)} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\varepsilon_{kn}}} \frac{a_{1n} \varepsilon_{2n} - a_{2n} \varepsilon_{1n}}{\sqrt{\varepsilon_{1n} \varepsilon_{2n}} (\sqrt{\varepsilon_{1n}} + \sqrt{\varepsilon_{2n}})},$$

$$C_{1n}^{(1)} = \frac{t_1}{\pi l} \left(\frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} + \frac{\rho_{01} \gamma_1 C_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{1n}} \right) \frac{1 - (-1)^n}{n} \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon_{1n}} l}}{\sqrt{\varepsilon_{1n}}},$$

$$C_{1n}^{(2)} = \frac{2t_1}{\pi l (\sqrt{\varepsilon_{1n}} + \sqrt{\varepsilon_{2n}})} \left[\left(\frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} + \frac{\rho_{01} \gamma_1 C_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{1n}} \right) e^{-\sqrt{\varepsilon_{1n}} l} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{2n}} - \sqrt{\varepsilon_{1n}}}{2\sqrt{\varepsilon_{2n}}} \left(\frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} + \frac{\rho_{02} \gamma_2 C_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{2n}} \right) e^{-\sqrt{\varepsilon_{2n}} l} - \frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} - \frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} + \frac{\rho_{01} \gamma_1 C_1}{\varepsilon_0} \frac{l \sqrt{\varepsilon_{1n}} - 1}{\varepsilon_{1n}} - \frac{\rho_{02} \gamma_2 C_2}{\varepsilon_0} \frac{l \sqrt{\varepsilon_{1n}} + 1}{\varepsilon_{2n}} \right] \frac{1 - (-1)^n}{n},$$

$$C_{2n}^{(1)} = \frac{2t_1}{\pi l (\sqrt{\varepsilon_{1n}} + \sqrt{\varepsilon_{2n}})} \left[\frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} + \frac{\rho_{02} \gamma_2 C_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{2n}} \right] e^{-\sqrt{\varepsilon_{2n}} l} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{1n}} - \sqrt{\varepsilon_{2n}}}{2\sqrt{\varepsilon_{1n}}} \left(\frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} + \frac{\rho_{01} \gamma_1 C_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{1n}} \right) e^{-\sqrt{\varepsilon_{1n}} l} - \frac{\eta_{l1}}{\lambda_1} - \frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} - \frac{\rho_{01} \gamma_1 C_1}{\varepsilon_0} \frac{l \sqrt{\varepsilon_{2n}} + 1}{\varepsilon_{1n}} + \frac{\rho_{02} \gamma_2 C_2}{\varepsilon_0} \frac{l \sqrt{\varepsilon_{2n}} - 1}{\varepsilon_{2n}} \right] \frac{1 - (-1)^n}{n},$$

$$C_{2n}^{(2)} = \frac{t_1}{\pi l} \left(\frac{\eta_{l2}}{\lambda_2} + \frac{\rho_{02} \gamma_2 C_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{2n}} \right) \frac{1 - (-1)^n}{n} \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon_{2n}} l}}{\sqrt{\varepsilon_{2n}}},$$

$$D_{1n}^{(1)} = C_{1n}^{(1)} e^{2\sqrt{\varepsilon_{1n}} l} + C_{2n}^{(1)}, \quad D_{1n}^{(2)} = C_{1n}^{(2)} + C_{2n}^{(2)} e^{2\sqrt{\varepsilon_{2n}} l}.$$

Полученные решения могут быть доведены до числа при известных удельной электроемкости $C = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)_t$ и температурном коэффициенте изменения электрического потенциала $\gamma = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_\omega$. Согласно оценке, приведенной в работе [1], коэффициент C имеет порядок $10^3 \frac{\kappa \lambda}{\sigma \cdot \kappa_2}$. Для оценки коэффициента γ примем, что электрический потенциал Φ определяется средней энергией W_0 свободных электронов рассматриваемого элемента тела, т. е. формулой [2]

$$\Phi = - \frac{W_0}{q_0} = - \frac{3}{5q_0} W_{f0} \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{W_{f0}} \right)^2 \right], \quad (7)$$

где W_{f0} — энергия Ферми электрона при 0°K ; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{град}}$ постоянная Больцмана; $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ кл}$ — заряд электрона.

Учитывая равенство $\varphi = \Phi - \Phi_0$, получаем

$$\varphi = (\Phi - \Phi_0)_\omega = - \frac{\pi^2 k^2}{4q_0 W_{f0}} (T^2 - T_0^2) \quad (8)$$

или в линейном приближении

$$\varphi = - \frac{\pi^2 k^2 T_0}{2q_0 W_{f0}} t. \quad (9)$$

Отсюда $\gamma = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\omega} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{W_{i0}} = -\frac{\pi^2 k^2 T_0}{2q_0 W_{i0}}$. Принимая $T_0 = 300^\circ \text{K}$, $W_{i0} = 7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, получаем $\gamma \approx -10^{-6} \frac{\text{в}}{\text{град}}$.

Результаты численных исследований представлены в виде графиков. При вычислениях принималось $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$, $\Phi_0^{(1)} = -1 \text{ в}$, $\Phi_0^{(2)} = -1,2 \text{ в}$, $C_1 = C_2 = 10^3 \frac{\text{кЛ}}{\text{в} \cdot \text{кГ}}$, $\rho_{01} = 10,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}$, $\rho_{02} = 8,89 \cdot 10^3 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}$, $\gamma_1 = -2,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{в}}{\text{град}}$, $\gamma_2 = -2,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{в}}{\text{град}}$, $\lambda_1 = 6,4 \cdot 10^7 \frac{\text{кЛ}}{\text{в} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}}$, $\lambda_2 = 6,4 \cdot 10^7 \frac{\text{кЛ}}{\text{в} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}}$, $\eta_{12} = 163 \frac{\text{кЛ}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$, $\eta_{22} = 64 \frac{\text{кЛ}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$.

На рис. 2 показано распределение поверхностных зарядов $\Omega_0^{(k)*} = \frac{\Omega_0^{(k)}}{\sqrt{\rho_{01} \epsilon_0 C_1 \Phi_0^{(k)}}}$ (кривая 1) и $\Omega_t^{(k)*} = \frac{\Omega_t^{(k)}}{2\sqrt{\rho_{01} \epsilon_0 C_1 \gamma_1 t_1}}$ (кривая 2), которые

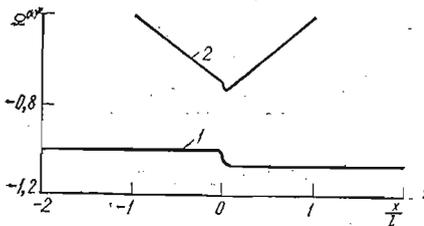


Рис. 2

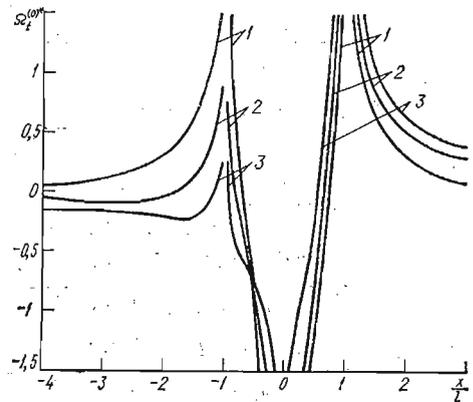


Рис. 3

уравновешены сконцентрированными в приповерхностной области слоя распределенными объемными электрическими зарядами $\rho_{0k} \omega_0^{(k)}$ и $\rho_{0k} \omega_t^{(k)}$ соответственно. Рис. 3 иллюстрирует распределение поверхностных зарядов $\Omega_t^{(0)*} = \frac{\pi \lambda_1}{\epsilon_0 t_1 \eta_{t1}} \Omega_t^{(0)}$ для $\frac{\eta_{12} \lambda_1}{\eta_{t1} \lambda_2} = 1; 0,5; 0,25$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Из приведенных результатов следует, что контакт разнородных электропроводных твердых тел в равновесном состоянии не приводит к появлению электростатического поля вне тел (в вакууме). При неоднородном нагреве поверхности электропроводного тела вне его возникает электростатическое поле. Электростатическое поле в вакууме, вызванное неоднородным нагревом контактируемых тел, существенно зависит от термоэлектрических характеристик рассматриваемых тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнидец Б. М. Определение равновесного состояния деформируемого электропроводного твердого раствора.— Математические методы и физико-механические поля, 1976, вып. 3, с. 76—82.
2. Кобилянський В. Б. Статистична фізика. К., «Вища школа», 1972.
3. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М. Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов.— Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. 1, с. 22—29.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 30.VI 1975 г.