

и квадратичными

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= 5,2 \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 + 5,9 \frac{T}{T_0} + 0,97, \\ \frac{\alpha}{\alpha_0} &= 0,3 \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 - 0,6 \frac{T}{T_0} + 1,04 \end{aligned} \quad (11)$$

полиномами. Расчеты производились для трех условий закрепления и нескольких значений параметра  $p$  оболочки при  $\nu = 0,3$ . Для определения точности полученных результатов оболочка разбивалась на 8 и 16 частей, а  $\epsilon$  изменялось от 0,01 до 0,001. Разность полученных результатов не превышала 4%.

Экстремальные температурные поля и напряжения для свободно опертой оболочки при  $p = 10$  приведены на рис. 1. Сплошная линия соответствует линейной зависимости температурных характеристик (10), а штриховая — квадратичной аппроксимации (11). Постоянным характеристикам  $E/E_0 = 0,75$ ,  $\alpha/\alpha_0 = 1,12$  соответствует штрихпунктирная линия.

На рис. 2—4, которые соответствуют свободной, жестко заземленной и шарнирно опертой по краям оболочке, представлено влияние параметра  $p$  на температурные поля и напряжения в предположении линейной зависимости (10) температурных характеристик. Кривые 1, 2, 3 соответствуют параметрам  $p = 5; 10; 15$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
2. Григлюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. О постановке и решении одного класса экстремальных задач термоупругости для оболочек вращения. — В кн.: Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971, с. 66—73.
3. Огірко І. В. Уточнений розрахунок гнучких пластин узагальненим методом Ньютона. — Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1975, № 10, с. 56—60.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
20.XII 1974 г.

УДК 536.21 : 539.377

В. М. Вигак

### РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ

При исследовании надежности работы теплоэнергооборудования в пусковой период ставится задача определения реальных нестационарных температурных полей и напряжений в его деталях. Проводимое при этом экспериментальное изучение нестационарных температурных режимов оборудования ограничивается преимущественно измерением температуры необогреваемой наружной поверхности узла или детали, так как измерение температур по толщине рабочей детали в ряде случаев затруднительно и нежелательно из-за ослабления ее в прочностном отношении, связанного со сверлениями под термомпары на различную ее глубину.

Аналитическое или численное определение нестационарных температурных полей с помощью решения задачи теплопроводности в обычной постановке [6] применительно к таким деталям не находит широкого практического применения из-за неопределенности условия теплообмена и коэф-

коэффициента теплоотдачи на обогреваемой внутренней поверхности детали. Кроме того, коэффициент теплоотдачи от греющей среды к внутренней поверхности детали зависит от температуры и времени, особенно в период фазового перехода среды, что приводит к нелинейной постановке задачи теплопроводности.

Экспериментальные исследования напряжений, например, с помощью тензометрии в деталях действующего энергооборудования, работающего при высоких температурах, также не находят пока применения из-за технической трудности их проведения в производственных условиях, а также по причине ненадежной работы собственно тензодатчиков и схемы измерения при нестационарных режимах в области высоких температур.

С целью определения нестационарных температурных напряжений в деталях энергооборудования ниже рассматривается решение обратной одномерной нестационарной задачи теплопроводности для неограниченной пластины, полых цилиндра и сферы при заданных на одной из поверхностей температуре, как функции времени, и условии теплообмена.

Рассмотрим решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial \rho^2} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial T_j}{\partial \rho} = \frac{\partial T_j}{\partial Fo} \quad (j = 0, 1, 2) \quad (1)$$

применительно к основным деталям теплоэнергооборудования, рассчитываемых по схеме неограниченной пластины ( $j = 0$ ), полых цилиндра ( $j = 1$ ) и сферы ( $j = 2$ ) при заданных температуре наружной поверхности детали, предварительно аппроксимированной степенным рядом по времени

$$T_j(q, Fo) = \sum_{n=0}^p \omega_n Fo^n, \quad (2)$$

граничному условию второго рода на той же поверхности, представляемым аналогичным образом:

$$\frac{\partial T_j(q, Fo)}{\partial \rho} = \sum_{n=0}^n \gamma_n Fo^n \quad (3)$$

и начальном условии

$$T_j(\rho, 0) = f(\rho). \quad (4)$$

Здесь  $\rho = \frac{x}{k}$  для пластины;  $x$  — ось координат с началом на одной из поверхностей пластины;  $h$  — толщина пластины;  $\rho = \frac{r}{R_2}$  для цилиндра и сферы;  $R_2$  — наружный радиус цилиндра или сферы;  $Fo = \frac{a\tau}{h^2}$  — критерий Фурье для пластины;  $Fo = \frac{a\tau}{R_2^2}$  — критерий Фурье для цилиндра и сферы;  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $q = 0$  для пластины и  $q = 1$  для цилиндра и сферы.

Нетрудно показать, что, выбрав в качестве второго граничного условия условие третьего рода на границе  $\rho = q$  [6], его с помощью заданной температуры (2) легко свести к условию второго рода (3).

Для деталей простой геометрии известен метод решения обратных нестационарных задач теплопроводности с помощью представления решения линейной комбинацией заданной температуры и ее производных по времени [8]. Однако трудности точного определения производных второго и высшего порядков от заданной температуры, когда последняя измерена и представлена в виде таблицы или графика, препятствуют широкому применению на практике этого метода.

Представление табличных или графических функций аналитическими, например, измеренной температуры — в виде ряда (2), позволяет гибко использовать хорошо разработанный математический аппарат аппроксимации функции различными методами [1, 2, 5, 10 и др.]. Например, метод аппроксимации с помощью наименьших квадратов позволяет сглаживать

случайные отклонения измеренных величин и правдиво описать поведение функции. Поэтому применение приведенного ниже решения обратной задачи теплопроводности всецело зависит от удачного представления табличной или графической функции аналитической в виде степенного ряда по времени (2).

Разумеется, если заданная табличная или графическая функция аппроксимирована аналитическим выражением, то для определения температурного поля можно использовать решение обратной задачи, предложенное в работе [8]. Однако, на наш взгляд, проще и удобнее для практического применения получить непосредственно решение уравнения (1) при краевых условиях (2) — (4).

Решение поставленной задачи (1) — (4) ищем в виде [7]

$$T_j(\rho, Fo) = \sum_{n=0}^p T_{j,n}(\rho) Fo^n + T_j^*(\rho, Fo). \quad (5)$$

Подставив предполагаемый вид решения (5) в уравнение (1) и краевые условия (2) — (4), для определения искоемых функций  $T_{j,n}(\rho)$  ( $n = 0, 1, \dots, p$ ) и  $T_j^*(\rho, Fo)$  получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 T_{j,n}}{d\rho^2} + \frac{j}{\rho} \frac{dT_{j,n}}{d\rho} = (n+1) T_{j,n+1} \quad (n = 0, 1, \dots, p; T_{j,p+1} = 0), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 T_j^*}{\partial \rho^2} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial T_j^*}{\partial \rho} = \frac{\partial T_j^*}{\partial Fo} \quad (7)$$

и краевые условия

$$T_{j,n}(q) = \omega_n \quad (n = 0, 1, \dots, p), \quad (8)$$

$$\frac{dT_{j,n}(q)}{d\rho} = \gamma_n \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$T_j^*(q, Fo) = 0, \quad \frac{\partial T_j^*(q, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (9)$$

$$T_j^*(\rho, 0) = f(\rho) - T_{j,0}(\rho). \quad (10)$$

Решение системы уравнений (6) при граничных условиях (8) имеет следующий вид: для пластины ( $j = 0$ )

$$T_{0,n}(\rho) = \omega_n + \gamma_n \rho + P_{0,n}(\rho) \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$P_{0,n}(\rho) = \sum_{m=1}^{p-n} \frac{(n+m)! \rho^{2m}}{n! (2m)!} \left( \omega_{n+m} + \frac{\gamma_{n+m}}{2m+1} \rho \right) \quad (n = 0, 1, \dots, p-1);$$

$$P_{0,p}(\rho) = 0;$$

для цилиндра ( $j = 1$ )

$$T_{1,n}(\rho) = a_{1,n} + b_{1,n} \ln \rho + P_{1,n}(\rho) \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$P_{1,n}(\rho) = \sum_{m=1}^{p-n} \frac{(n+m)! \rho^{2m}}{n! [(2m)!]^2} \left[ a_{1,n+m} + \left( \ln \rho - \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \right) b_{1,n+m} \right]$$

$$(n = 0, 1, \dots, p-1);$$

$$P_{1,p}(\rho) = 0;$$

$$a_{1,n} = \omega_n - P_{1,n}(1) \quad (n = 0, 1, \dots, p),$$

$$b_{1,n} = \gamma_n - P'_{1,n}(1) \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

для сферы ( $j = 2$ )

$$T_{2,n}(\rho) = a_{2,n} - \frac{b_{2,n}}{\rho} + P_{2,n}(\rho) \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$P_{2,n}(\rho) = \sum_{m=1}^{p-n} \frac{(n+m)! \rho^{2m}}{n! (2m)!} \left( \frac{a_{2,n+m}}{2m+1} - \frac{b_{2,n+m}}{\rho} \right) \quad (n = 0, 1, \dots, p-1);$$

$$P_{2,p}(\rho) = 0;$$

$$a_{2,n} = \omega_n + \gamma_n - P_{2,n}(1) - P'_{2,n}(1) \quad (n = 0, 1, \dots, p),$$

$$b_{2,n} = \gamma_n - P'_{2,n}(1) \quad (n = 0, 1, \dots, p).$$

Решая уравнение (7) при граничных условиях (9), нетрудно показать, что

$$T_j^*(\rho, Fo) \equiv 0.$$

Например, для пластины ( $j = 0$ ) решение уравнения (7) можно представить в таком виде:

$$T_0^*(\rho, Fo) = (A \cos \lambda \rho + B \sin \lambda \rho) \exp(-\lambda^2 Fo).$$

Подставив последнее выражение в граничные условия (9), получим

$$\begin{aligned} A \cos \lambda + B \sin \lambda &= 0, \\ -A \lambda \sin \lambda + B \lambda \cos \lambda &= 0, \end{aligned}$$

а эта система уравнений может иметь ненулевое решение при

$$\lambda (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) = 0.$$

Откуда  $\lambda = 0$ . Поэтому  $A = 0$  и тогда  $T_0^*(\rho, Fo) \equiv 0$ . Аналогично можно показать, что  $T_j^*(\rho, Fo) \equiv 0$  при  $j = 1, 2$ . Теперь из начального условия (10) следует, что

$$f(\rho) = T_{j,0}(\rho). \quad (11)$$

Таким образом, решение обратной нестационарной задачи теплопроводности при заданных граничных условиях на одной из поверхностей (2), (3) имеет вид

$$T_j(\rho, Fo) = \sum_{n=0}^p T_{j,n}(\rho) Fo^n \quad (j = 0, 1, 2), \quad (12)$$

но при этом решение (12) справедливо не для произвольного начального распределения температур, а лишь для частного случая, удовлетворяющего условию (11). Определив температурное поле, на основании известных выражений термоупругости [3] можно найти температурные напряжения.

Для решения приведенной обратной задачи теплопроводности при заданной температуре теплоизолированной снаружи поверхности цилиндра разработана программа расчета на ЭВМ «Минск-22», позволяющая по экспериментальной кривой изменения температуры наружной поверхности паропроводов и паросборных коллекторов определить нестационарное температурное поле и максимальные температурные напряжения.

Такая методика расчета была применена при исследовании температурных напряжений в паропроводах высокого давления. На рис. 1 в качестве примера приведены экспериментальная кривая изменения температуры наружной поверхности паропровода диаметра  $245 \times 45$  мм (кривая 1), рассчитанные перепад температур по толщине стенки  $\delta T = T(k, \tau) - T(1, \tau)$  (кривая 2) и максимальные относительные температурные напряжения на внутренней поверхности  $S(k, \tau) = \frac{1-\nu}{\alpha_T E} \sigma(k, \tau)$  (кривая 3). Здесь  $T(1, \tau)$  — температура наружной поверхности паропровода;  $T(k, \tau)$  — температура внутренней поверхности;  $\sigma(k, \tau)$  — температурные напряжения на внутренней поверхности;  $k = \frac{R_1}{R_2}$  — отношение внутреннего радиуса паропровода  $R_1$  к наружному  $R_2$ ;  $\nu$  и  $\alpha_T$  — коэффициенты Пуассона и линейного расширения;  $E$  — модуль упругости.

Определив перепад температур по толщине стенки цилиндра  $\delta T$  и относительные температурные напряжения на внутренней поверхности  $S(k, \tau)$ , с помощью зависимости [9]

$$S(1, \tau) - S(k, \tau) = \delta T$$

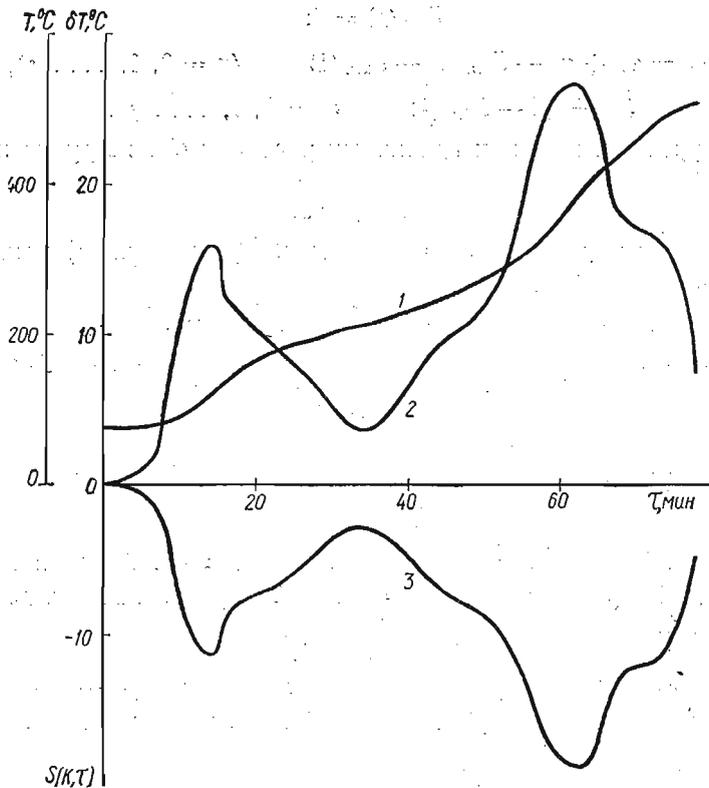


Рис. 1

легко найти относительные температурные напряжения на наружной поверхности  $S(1, \tau)$ .

Для оценки точности определения температурных напряжений этим методом на рис. 2 приведены максимальные относительные температурные напряжения на внутренней поверхности паропровода диаметра  $325 \times 45$  мм (кривая 1), рассчитанные с помощью полученного решения обратной задачи теплопроводности на основании экспериментальной кривой изменения температуры наружной поверхности  $T(1, \tau)$ , приведенной в верхней части рисунка, и фактические напряжения (кривая 2), найденные с помощью экспериментального определения температурного поля паропровода на специальном стенде [9]. Здесь  $T(k, \tau)$  — экспериментальная кривая температуры внутренней поверхности паропровода.

Как видно из рис. 2, расчетные напряжения меньше фактических на 10—13%; что объясняется повышением на тот же процент фактического перепада температур по толщине стенки паропровода по сравнению с расчетным, вызванного в основном потерями тепла на прогрев теплоизоляции [9].

При определении допустимых температурных режимов для деталей энергооборудования, используемых для оптимизации управления переходными процессами, возникает необходимость оценки величины критерия Био на внутренней поверхности детали [4]. Решение обратной задачи теплопроводности позволяет с помощью граничного условия теплообмена третьего рода на внутренней поверхности детали

$$\frac{\partial T_i(b, Fo)}{\partial \rho} - Bi [T_i(b, Fo) - t(Fo)] = 0$$

определить критерий Био  $Bi$  или коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  на той же поверхности при заданной или измеренной температуре греющей среды  $t(Fo)$ .

Здесь  $b = 1$  для пластины и  $b = k$  для цилиндра и сферы;  $Bi = \frac{\alpha b}{\lambda}$  для

пластины и  $Bi = \frac{\alpha R_2}{\lambda}$  для цилиндра и сферы;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

На рис. 3 показан характер изменения критерия  $Bi$  для внутренней поверхности паропровода диаметра  $325 \times 45$  мм (кривая 1), рассчитанного указанным выше путем с помощью измеренных температуры наружной поверхности (кривая 2) и температуры греющей среды (кривая 3).

Таким образом, решение приведенной обратной задачи теплопроводности позволяет определить не-

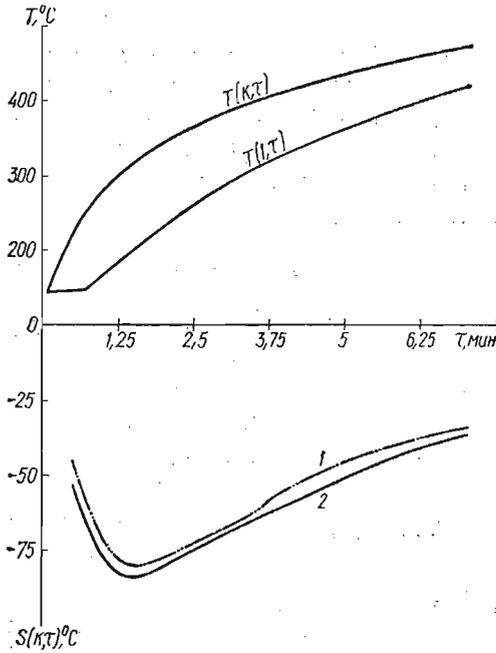


Рис. 2

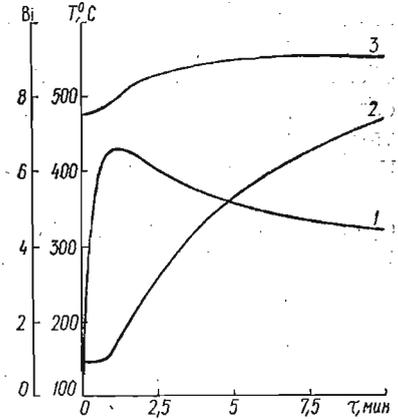


Рис. 3

обходимые для оценки работоспособности теплоэнергооборудования в пусковой период температурные напряжения и коэффициенты теплоотдачи (критерий  $Bi$ ) с помощью экспериментально снятых кривых изменения температуры наружной поверхности детали и температуры греющей среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М., «Наука», 1966.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964.
4. Вигак В. М., Фальковский С. В., Горешник А. Д., Мащенко Б. В. Допустимые температурные напряжения и скорости прогрева (расхолаживания) паропроводов. М., «Энергия», 1975.
5. Гончаров В. Л. Теория приближения и интерполирования функций. М., Гостехиздат, 1954.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967.
7. Подстригач Я. С. Температурне поле в стінках постійної товщини при асимптотичному тепловому режимі.—В кн.: Температурні напруження в тонкостінних конструкціях. К., Вид-во АН УРСР, 1959.
8. Темкин А. Г. Обратные методы теплопроводности. М., «Энергия», 1973.
9. Фальковский С. В., Вигак В. М. Исследование температурных полей и напряжений в трубе при нестационарных тепловых режимах.— Теплоэнергетика, 1967, № 10.
10. Хемминг Р. В. Численные методы. М., «Наука», 1972.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.X 1974 г.