

Последнее равенство получено заменой $\cos \theta = \eta$ и использованием одной из следующих формул [7] для многочленов Якоби $P_m^{\alpha, \beta}(x)$:

$$(1-x)P_{n-1}^{1,0}(x) = P_n^-(x), \quad (1+x)P_{n-1}^{0,1}(x) = P_n^+(x).$$

Учитывая рекуррентную формулу (8.961) работы [4], получаем

$$nP_{n-1}^{1,0}(x) = C_{n-1}^{(3/2)}(x) + C_{n-2}^{(3/2)}(x).$$

И, наконец, используя формулу 10.9 (18) работы [3], для многочленов Генбауэра $C_n^{(\lambda)}(x)$ окончательно получим

$$S_m(y) = m^{-1} [C_{m-1}(y) + C_{m-2}(y)] \sqrt{y} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (41)$$

$$C_n(y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \frac{(-1)^m \left(\frac{3}{2}\right)_{n-m}}{m! \left(\frac{1}{2}\right)_{n-2m}} (2y)^{n-2m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; C_{-1}(y) \equiv 0).$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что приближенное решение уравнения (14) выражается через тригонометрические функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблюя А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.— ПММ, 1967, 31, № 4.
2. Бейтмен Г., Эрдейк А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
3. Бейтмен Г., Эрдейк А. Высшие трансцендентные функции. Ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
6. Попов Г. Я. О сведениях интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам.— ПММ, 1972, 36, № 4.
7. Попов Г. Я. Заметка о многочленах Якоби.— Мат. исслед., 1972, 7, № 2.
8. Попов Г. Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1966, № 4.
9. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами.— ПММ, 1970, 34, № 4.

Одесский
университет

Поступила в редколлегию
5. XI 1974 г.

УДК 539.377

Я. И. Бурак, И. В. Огирко

ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ МАТЕРИАЛА

При осесимметричном нагреве цилиндрической оболочки постоянным по толщине температурным полем система уравнений термоупругости [4] сводится к одному разрешающему уравнению, записанному относительно функции прогиба W и температуры T :

$$F_0 \equiv -\frac{d^2}{dx^2} \left(E_1 \frac{d^2 W_1}{dx^2} \right) + 4p^4 E_1 (W_1 - \varepsilon_{T_0} \alpha_1 T_1) = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } T_1 = \frac{T}{T_0}; \quad W_1 = \frac{W}{R}; \quad E_1(T_1) = \frac{E(T)}{E_0}; \quad \alpha_1(T_1) = \frac{\alpha(T)}{\alpha_0};$$

$E(T)$, $\alpha(T)$ — зависящие от температуры модуль упругости и линейный коэффициент температурного расширения; $\varepsilon_{T_0} = \alpha_0 T_0$; E_0 — некоторые характерные значения характеристик материала и температуры; ν — коэф-

коэффициент Пуассона; $x = \frac{b}{pR} z$ — безразмерная осевая координата, отсчитываемая от центрального сечения ($-1 \leq x \leq 1$); $p = \frac{ba}{R}$; $b^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}$; R , $2h$, $2a$ — радиус, толщина и длина цилиндрической оболочки соответственно.

Энергия упругой деформации записывается в виде

$$K = 2\pi R^2 h \frac{p}{b} \int_{-1}^1 F_1 [W_1, T_1] dx,$$

$$\text{где } F_1 [W_1, T_1] \equiv E_0 E_1 \left[\frac{1}{4p^4} \left(\frac{d^2 W_1}{dx^2} \right)^2 + (W_1 - \varepsilon_{T_0} \alpha_1 T_1)^2 \right], \text{ т. е.}$$

представляет собой функционал, заданный на множестве функций W_1 , T_1 , которые удовлетворяют разрешающему уравнению (1).

Определим осесимметричные температурные поля в цилиндрической оболочке, которые в пределах заданных условий нагрева обеспечивают максимально низкий уровень температурных напряжений. В качестве критерия оптимальности примем условия минимума энергии упругой деформации оболочки [2]. Тогда решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению экстремалей функционала

$$K^* [W_1, T_1] = 2\pi R^2 h \frac{p}{b} \int_{-1}^1 (F_1 + \lambda(x) F_0) dx. \quad (2)$$

Приравняв нулю первую вариацию функционала (2) в предположении, что на краях оболочки задано необходимое число условий на допустимые функции и их производные, согласованных с условием закрепления, получаем следующие уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv \frac{d^2}{dx^2} \left(E_1 \frac{d^2 W_1}{dx^2} \right) + 4p^4 E_1 (W_1 - \varepsilon_{T_0} \alpha_1 T_1) = 0, \\ F_2 &\equiv \left[\frac{1}{4p^4} \left(\frac{d^2 W_1}{dx^2} \right)^2 + (W_1 - \varepsilon_{T_0} \alpha_1 T_1)^2 \right] \frac{dE_1}{dT_1} - 2\varepsilon_{T_0} E_1 (W_1 - \varepsilon_{T_0} \alpha_1 T_1) \times \\ &\times \left(\frac{d\alpha_1}{dT_1} T_1 + \alpha_1 \right) + 4p^4 \lambda_1 \left[(W_1 - \varepsilon_{T_0} \alpha_1 T_1) \frac{dE_1}{dT_1} - \varepsilon_{T_0} E_1 \left(\frac{d\alpha_1}{dT_1} T_1 + \alpha_1 \right) \right] + \\ &+ \frac{d^2 \lambda_1}{dx^2} \frac{d^2 W_1}{dx^2} \frac{dE_1}{dT_1} = 0, \quad (3) \\ F_3 &\equiv \frac{d^4 \lambda_1}{dx^4} + 2 \frac{d^3 \lambda_1}{dx^3} \frac{dE_1}{dT_1} \frac{dT_1}{dx} - \frac{d^2 \lambda_1}{dx^2} \left[\frac{d^2 E_1}{dT_1^2} \left(\frac{dT_1}{dx} \right)^2 + \frac{dE_1}{dT_1} \frac{d^2 T_1}{dx^2} \right] + \\ &+ 4p^4 E_1 \lambda_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \lambda_1 = \lambda \frac{b^4}{p^4 R^3}.$$

Ограничимся симметричными относительно сечения $x = 0$ экстремальными решениями задачи. Будем предполагать, что искомые функции W_1 , T_1 , λ_1 удовлетворяют в данном сечении следующим условиям:

$$\frac{dW_1(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^3 W_1(0)}{dx^3} = 0, \quad \frac{dT_1(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d\lambda_1(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^3 \lambda_1(0)}{dx^3} = 0. \quad (4)$$

Найдем экстремальное температурное поле, которое достигает своего максимального значения, равного T_0 , в сечении $x = 0$. При этом на крае оболочки температура равна нулю. Кроме того, будем требовать гладкости функции T_1 при $x = 1$, т. е. примем

$$T_1(0) = T_0, \quad T_1(1) = 0, \quad \frac{dT_1(1)}{dx} = 0. \quad (5)$$

В случае свободной на краях оболочки

$$\frac{d^2 W_1(1)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 W_1(1)}{dx^3} = 0. \quad (6)$$

Используя второе уравнение (3), а также уравнения (5), (6), получаем

$$\frac{d^2 \lambda_1(1)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 \lambda_1(1)}{dx^3} = 0. \quad (7)$$

Аналогично получаем граничные условия для функции λ_1 , когда края оболочки жестко защемлены или шарнирно оперты.

Сформулированная краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений (3) здесь решается разностным аналогом метода типа Ньютона — быстро сходящимся итерационным методом релаксации, позволяющим эффективно применять ЭВМ [3]. Методика решения состоит в следующем.

Разбиваем область $0 \leq x \leq 1$ оболочки на N равных частей с шагом $h_1 = 1/N$. Дифференциальные операторы в системе уравнений (3) аппроксимируем конечно-разностными симметричными выражениями [3] с погрешностью $o(h_1^2)$, в частности,

$$\frac{dW_{1i}}{dx} = \frac{W_{1i+1} - W_{1i-1}}{2h_1},$$

$$\frac{d^2 W_{1i}}{dx^2} = \frac{W_{1i-1} - 2W_{1i} + 2W_{1i+1}}{h_1^2}.$$

Таким образом, получили систему нелинейных алгебраических уравнений относительно значений W_{1i} , T_{1i} , λ_{1i} в точках разбиения отрезка $(0, 1)$, в которую входят также точки, выходящие за отрезок справа и слева. Значение искомых функций в этих точках выразим через их значения во внутренних точках с помощью условий симметрии (4) и граничных условий (5) — (7) после их аппроксимации соответствующими конечно-разностными выражениями высокой точности [1] с погрешностью $o(h_1^4)$.

Начальные значения искомых функций задаем в виде

$$W_{1i}^{(0)} = \frac{N^2 - i^2}{N^2} l, \quad T_{1i}^{(0)} = \frac{N^2 - i^2}{N^2}, \quad \lambda_{1i}^{(0)} = (\varepsilon \tau_0 - W_{1i}^{(0)}) \frac{1}{2\rho^4} \left(1 - \frac{i}{N}\right), \quad (8)$$

где l — постоянный множитель.

Последовательное приближение для прогибов $W_{1i}^{(n)}$, температуры $T_{1i}^{(n)}$ и функции $\lambda_{1i}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ в точках разбиения определяются по формулам

$$\begin{aligned} W_{1i}^{(n+1)} &= W_{1i}^{(n)} - \beta_1 F_0 [W_{1i}^{(n)}, T_{1i}^{(n)}] / F_0' [W_{1i}^{(n)}], \\ T_{1i}^{(n+1)} &= T_{1i}^{(n)} - \beta_2 F_2 [W_{1i}^{(n)}, T_{1i}^{(n)}, \lambda_{1i}^{(n)}] / F_2' [T_{1i}^{(n)}], \\ \lambda_{1i}^{(n+1)} &= \lambda_{1i}^{(n)} - \beta_3 F_3 [T_{1i}^{(n)}, \lambda_{1i}^{(n)}] / F_3' [\lambda_{1i}^{(n)}], \end{aligned} \quad (9)$$

где $F_0 [W_{1i}]$ — оператор релаксации, получающийся простым дифференцированием оператора невязки $F_0 [W_{1i}, T_{1i}]$ по W_{1i} ; $F_2' [T_{1i}]$, $F_3' [\lambda_{1i}]$ — операторы релаксации функций T_{1i} и λ_{1i} соответственно; β_i ($i = 1, 2, 3$) — параметры релаксации.

При $0,1 < \beta_i < 1$ процесс называется нижней релаксацией, при $1 < \beta_i < 1,5$ — верхней и при $\beta_i = 1$ — простой. Если начальные значения функций (8) недостаточно близки к точным, рекомендуется сначала пользоваться верхней релаксацией, а потом переходить на нижнюю. Процесс приближений по формулам (9) продолжается до тех пор, пока не достигнута необходимая точность, т. е. пока относительная погрешность всех функций в каждой из точек не станет меньше наперед заданного числа ε .

Используя полученные по известным формулам [4] безразмерные прогиб W_1 и температуру T_1 , с помощью формул численного дифференцирования определяем осевые $\sigma_z = \sigma_z E_0 \alpha_0 T_0$ и кольцевые $\sigma_\beta = \sigma_\beta E_0 \alpha_0 T_0$ напряжения в оболочке.

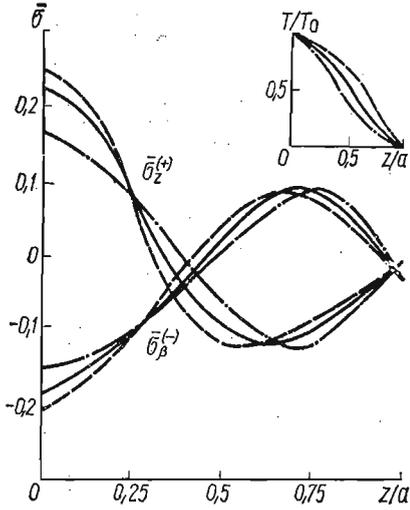


Рис. 1

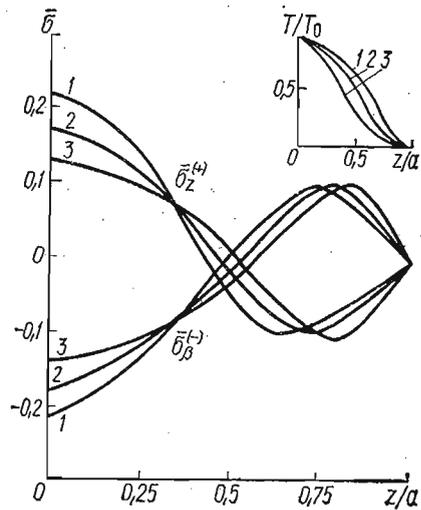


Рис. 2

Для расчета экстремального температурного поля и термоупругого состояния составлена программа на языке ФОРТРАН применительно к транслятору ЭВМ «Минск-32». Эта программа применима для произвольной зависимости от температуры характеристик материала E , α , а также различных условий закрепления краев оболочки.

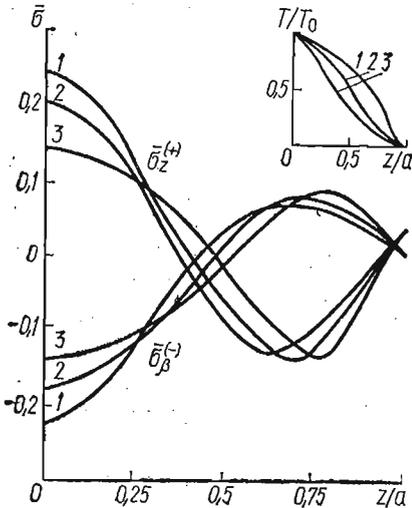


Рис. 3

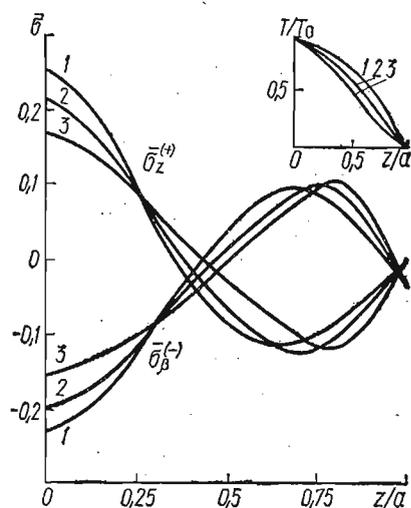


Рис. 4

Количественные исследования экстремальных температурных полей и соответствующих им напряжений производились для оболочки из металла Х18Н10Т. Температурные зависимости функций E и α представлялись линейными

$$\frac{E}{E_0} = -0,43 \frac{T}{T_0} + 1,043, \quad \frac{\alpha}{\alpha_0} = 0,42 \frac{T}{T_0} + 0,973 \quad (10)$$

и квадратичными

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= 5,2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 + 5,9 \frac{T}{T_0} + 0,97, \\ \frac{\alpha}{\alpha_0} &= 0,3 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - 0,6 \frac{T}{T_0} + 1,04 \end{aligned} \quad (11)$$

полиномами. Расчеты производились для трех условий закрепления и нескольких значений параметра p оболочки при $\nu = 0,3$. Для определения точности полученных результатов оболочка разбивалась на 8 и 16 частей, а ϵ изменялось от 0,01 до 0,001. Разность полученных результатов не превышала 4%.

Экстремальные температурные поля и напряжения для свободно опертой оболочки при $p = 10$ приведены на рис. 1. Сплошная линия соответствует линейной зависимости температурных характеристик (10), а штриховая — квадратичной аппроксимации (11). Постоянным характеристикам $E/E_0 = 0,75$, $\alpha/\alpha_0 = 1,12$ соответствует штрихпунктирная линия.

На рис. 2—4, которые соответствуют свободной, жестко заземленной и шарнирно опертой по краям оболочке, представлено влияние параметра p на температурные поля и напряжения в предположении линейной зависимости (10) температурных характеристик. Кривые 1, 2, 3 соответствуют параметрам $p = 5; 10; 15$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
2. Григлюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. О постановке и решении одного класса экстремальных задач термоупругости для оболочек вращения. — В кн.: Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971, с. 66—73.
3. Огірко І. В. Уточнений розрахунок гнучких пластин узагальненим методом Ньютона. — Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1975, № 10, с. 56—60.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. К., Вид-во АН УРСР, 1961.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
20.XII 1974 г.

УДК 536.21 : 539.377

В. М. Вигак

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ

При исследовании надежности работы теплоэнергооборудования в пусковой период ставится задача определения реальных нестационарных температурных полей и напряжений в его деталях. Проводимое при этом экспериментальное изучение нестационарных температурных режимов оборудования ограничивается преимущественно измерением температуры необогреваемой наружной поверхности узла или детали, так как измерение температур по толщине рабочей детали в ряде случаев затруднительно и нежелательно из-за ослабления ее в прочностном отношении, связанного со сверлениями под термомпары на различную ее глубину.

Аналитическое или численное определение нестационарных температурных полей с помощью решения задачи теплопроводности в обычной постановке [6] применительно к таким деталям не находит широкого практического применения из-за неопределенности условия теплообмена и коэф-