Подстановкой формул (11) в (9) находим связь между граничными величинами основной и сопряженной задач. Как видно, деформационным условиям основной задачи соответствуют статические условия сопряженной и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. М., Судпромгиз, 1951.
2. *Пелех Б. Л., Лунь Е. И.* Статико-геометрическая аналогия и метод комплексного преобразования в теории упругих оболочек типа Тимошенко.— ДАН СССР, 1970, **192**, № 6.
3. *Пелех Б. Л.* Некоторые вопросы теории и расчета анизотропных оболочек и пластин с низкой сдвиговой жесткостью.— Механика полимеров, 1970, № 4.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., «Наук. думка», 1973.
5. *Пелех Б. Л.* Деформаційні краєві умови і комплексне представлення умов спряження в теорії оболонок з кінцевою зсувною жорсткістю.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 11.
6. *Черных К. Ф.* Сопряженные задачи теории оболочек.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 6.X1974 г.

УДК 539.3

Г. Я. Попов

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-1}^{1} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \qquad |x| \leqslant 1, \tag{1}$$

полагая

$$k(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} K(t)\cos xt\,dt, \quad K(t) = O(t^{-1}), \quad t\to\infty. \tag{2}$$

Если правую часть разбить на четную $f_+(x)$ и нечетную $f_-(x)$ составляющие, то вместо уравнения (1) можно записать

$$\int_{0}^{1} [k(x-y) \pm k(x+y)]\,\varphi_\pm(y)\,dy = f_\pm(x), \qquad 0 \leqslant x < 1. \tag{3}$$

Исследуем уравнение для четной $\varphi_+(x)$ составляющей. Введя обозначение

$$\Phi(t) = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1} \varphi_+(y)\cos ty\,dy, \tag{4}$$

первое уравнение (3) можно записать в виде

$$\int_{0}^{\infty} \Phi(t)\,K(t)\cos xt\,dt = f_+(x), \qquad x < 1. \tag{5}$$

Обращая формулу (4) и присоединяя ее к (5), приходим к парному уравнению

$$\begin{gathered}\int_{0}^{\infty} \Phi(t)\,K(t)\cos xt\,dt = f_+(x), \qquad x<1,\\ \int_{0}^{\infty} \Phi(t)\cos xt\,dt = 0, \qquad x>1.\end{gathered} \tag{6}$$

Сведем полученное парное уравнение к уравнению второго рода. Для этого доопределим второй интегральный оператор в (6) следующим образом:

$$\int_0^\infty \Phi(t)\cos xt dt = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} + \int_x^1 \frac{t\psi(t)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}, \qquad x<1. \tag{7}$$

Это позволяет выразить функцию Φ через новую неизвестную ψ по формуле

$$\Phi(t) = AJ_0(t) + \int_0^1 \tau\psi(\tau) J_0(\tau t)\,d\tau. \tag{8}$$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя; A — произвольная постоянная.

На основании (2) можно записать

$$K(t) = \gamma t^{-1}[1+r(t)], \quad r(t) = \Theta(1), \quad t\to\infty. \tag{9}$$

Постоянную γ будем считать равной единице, что, как легко убедиться, не ограничивает общности.

Продифференцировав обе части первого уравнения в (6) по x, подставим в него (8) и (9). В результате получим

$$\int_0^x \frac{t\psi(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} = -f'_+(x) - \int_0^\infty r(\xi)\sin\xi x\left[AJ_0(\xi) + \int_0^1 \tau\psi(\tau)J_0(\tau\xi)\,d\tau\right]d\xi.$$

Обращая оператор, стоящий слева, приходим к интегральному уравнению второго рода

$$\psi(x) + \int_0^1 K(x,t)\psi(t)\,dt = -AK(x,1) - f^*(x),$$
$$K(x,t) = \int_0^\infty \xi r(\xi) J_0(\xi x) J_0(\xi t)\,d\xi, \quad f^*(x) = \frac{2}{\pi x}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f'_+(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}. \tag{10}$$

На основании формул (7) и (5) справедлива следующая связь между решениями уравнений (3) и (10):

$$\varphi_+(x) = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} + \int_x^1 \frac{t\psi(t)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}. \tag{11}$$

Для определения постоянной A следует представить решение уравнения (10) с учетом структуры его правой части в виде

$$\psi(x) = A\psi_0(x) + \psi_1(x), \tag{12}$$

где $\psi_0(x)$ — решение уравнения (10) с правой частью, равной $K(x,1)$, а $\psi_1(x)$ — с правой частью, равной $f^*(x)$.

Интегрируя (11) в интервале (0,1) и учитывая (12), получаем уравнение для определения A:

$$A\left[1 + \int_0^1 t\psi_0(t)\,dt\right] + \int_0^1 t\psi_1(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi_+(x)\,dx.$$

При этом следует иметь в виду, что интеграл в правой части имеет определенный механический или физический смысл и должен быть заданным (в контактных задачах это величина прижимающей силы).

Для решения интегрального уравнения (10) применим прием, указанный в работе [6], согласно которому решение следует искать в виде ряда по многочленам Лежандра:

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^\infty \psi_m P_m(1-2x^2). \tag{13}$$

Для коэффициентов приведенного разложения получаем бесконечную систему

$$\frac{\psi_n}{2(1+2n)}+\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}\psi_m=f_n,\quad f_n=\int_0^1 xf(x)P_n(1-2x^2)\,dx,$$

$$a_{nm}=\int_0^{\infty} r(t)\,J_{1+2n}(t)\,J_{1+2m}(t)\,dt.$$

Учитывая выражения (13) и (11), решение исходного интегрального уравнения получаем в виде

$$\varphi_+(x)=\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_m(-1)^m T_{2m+1}(x)}{(2m+1)x}.$$

Здесь использовалась следующая связь между многочленами Лежандра и многочленами Чебышева первого рода $T_n(z)$:

$$\int_x^1\frac{tP_m(1-2t^2)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}=\frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{T_{2n+1}(x)}{x},$$

вытекающая из результатов работ [7, 8].

Аналогичные построения делаются и в случае нечетного варианта с той только разницей, что получаемое парное интегральное уравнение удобно решать методом преобразующих множителей Нобла [5].

Для решения интегрального уравнения (1) можно указать еще один способ решения, пригодный в случае, когда представление (2) отсутствует, и являющийся обобщением приема работы [9] на случай уравнений первого рода.

Рассмотрим уравнение (1) на другом интервале, т. е. рассмотрим уравнение

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\qquad\left(|x|<\frac{\pi}{2},\ k(x)=k(-x)\right).\tag{14}$$

Считаем ядерную функцию интегрируемой с квадратом, откуда следует справедливость (в смысле сходимости в среднем) разложения

$$k(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos mt,\quad a_m=\int_0^{\pi}k(t)\cos mt\,dt.\tag{15}$$

В задачах теории упругости, как правило, имеет место представление

$$ma_m=1+d_m\ (m\neq 0),\ d_m=\Theta(1),\ m\to\infty.\tag{16}$$

Разбивая, как и раньше, искомое решение на четную и нечетную составляющие, т. е. $\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x)$ и вводя обозначения

$$C_m^{\pm}=\int_0^{\pi/2}\begin{bmatrix}\cos my\\ \sin my\end{bmatrix}\varphi_{\pm}(y)\,dy,\tag{17}$$

приходим к парным уравнениям

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}a_m C_m^{\pm}\begin{bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{bmatrix}=f_{\pm}(x),\qquad 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ &\sum_{m=0}^{\infty}C_m^{\pm}\begin{bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{bmatrix}=0,\qquad \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{aligned}\tag{18}$$

Рассмотрим четную составляющую. Дифференцируя первое уравнение и учитывая (16), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}(1+d_m)C_m^{+}\sin mx = -f_{+}'(x), \qquad x<\frac{\pi}{2},\\
&\sum_{m=1}^{\infty}C_m^{+}\cos mx = -C_0^{+}, \qquad x>\frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Для решения полученного парного уравнения воспользуемся формулами [1]

$$P_k^{-}(\cos\theta) = P_{k-1}(\cos\theta) - P_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\sin k\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos k\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}. \tag{20}$$

Применяя содержащиеся здесь интегральные операторы соответственно к первому и второму уравнению (19), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}(1+d_m)C_m^{+}P_m^{-}(\cos\theta) = g_1(\theta), \qquad \theta<\frac{\pi}{2},\\
&\sum_{m=1}^{\infty}C_m^{+}P_m^{-}(\cos\theta) = \begin{cases} C_0 h(\theta), & \theta>\frac{\pi}{2},\\ \psi(\theta), & \theta<\frac{\pi}{2}.\end{cases}
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$g_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{f_{+}'(x)\sin\frac{x}{2}\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}};\ \tilde{\psi}(\theta) = \frac{-2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi/2}\frac{[\varphi_{+}(x)-C_0^{+}]\sin\frac{x}{2}\,dx}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}},$$

$$h(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}\,dx}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{\tau}\frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi}\sqrt{\tau-\xi}} = 2. \tag{22}$$

Последний интеграл вычислен с помощью формул работы [7]. Первое уравнение (21), очевидно, можно записать в таком виде:

$$\psi(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}d_m C_m^{+}P_m^{-}(\cos\theta) = g_1(\theta), \qquad \theta<\frac{\pi}{2}.$$

Исключая отсюда коэффициенты C_m^{+} путем обращения второго уравнения (21), на основании свойства ортогональности [1]

$$\int_0^{\pi}P_n^{-}(\cos\theta)P_m^{-}(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta = \begin{cases}\frac{2}{n}, & n=m,\\ 0, & n\neq m,\end{cases} \tag{23}$$

приходим к следующему интегральному уравнению второго рода:

$$\psi(\theta) + \int_0^{\pi/2}K(\theta,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\sigma\psi(\sigma)\,d\sigma = C_0^{+}g_0(\theta) + g_1(\theta), \qquad \theta<\frac{\pi}{2}, \tag{24}$$

где

$$2K(\theta,\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty}md_m P_m^{-}(\cos\theta)P_m^{-}(\cos\sigma),$$

$$g_0(\theta) = \int_{\pi/2}^{\pi}K(\theta,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\sigma h(\sigma)\,d\sigma.$$

Формула обращения

$$\int\limits_{\varphi}^{\alpha} \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_{\theta}^{\alpha} \frac{f(t)\sin\frac{t}{2}\,dt}{(\cos\theta-\cos t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \int\limits_{\varphi}^{\alpha} f(t)\,dt, \tag{25}$$

вытекающая из соотношения

$$\int\limits_{\varphi}^{t} \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta-\cos t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{\varphi}{2}},$$

представляющего перефразировку в тригонометрических функциях формулы (3.199) работы [4], примененная ко второму уравнению (21), приводит к соотношению

$$\varphi_{+}(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \int\limits_{x}^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\varphi(\theta)\,d\theta}{(\cos x-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} + C_0^{+}, \tag{26}$$

связывающему четное решение интегрального уравнения первого рода (14) с решением интегрального уравнения второго рода (24).

Для нечетной составляющей парного уравнения аналогично получаем интегральное уравнение второго рода

$$\psi_{-}(x) + \int\limits_{0}^{\pi/2} K(\theta,\sigma)\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\psi_{-}(\sigma)\,d\sigma = g_{-}(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

где

$$2K(\theta,\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} m d_m P_m^{+}(\cos\theta) P_m^{+}(\cos\sigma), \quad P_k^{+}(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x),$$

$$g_{-}(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_{0}^{\theta} \frac{f'_{-}(x)\cos\frac{x}{2}\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}, \tag{27}$$

и соответствующую формулу перехода от решения уравнения (27) к нечетному решению уравнения (14)

$$\varphi_{-}(x) = \frac{d}{dx}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \int\limits_{x}^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\psi_{-}(\theta)\,d\theta}{(\cos x-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

Решим интегральное уравнение (24), а уравнение (27) решается аналогично и на этом останавливаться не будем. Заметим, что согласно выражению (17)

$$C_0^{+} = \int\limits_{0}^{\pi/2} \varphi_{+}(x)\,dx, \tag{29}$$

а это представляет собой, как и раньше, заданную величину. В соответствии со структурой правой части уравнения (24) его решение представим в виде

$$\psi(\theta) = C_0\psi_0(\theta) + \psi_1(\theta). \tag{30}$$

При этом

$$\psi_i(\theta) = g_j(\theta) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m d_m \chi_m^{(j)} P_m^{-}(\cos\theta)$$
$$\left(\psi_m^{(j)} = \int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\psi_j(\sigma) P_m^{-}(\cos\sigma)\,d\sigma\right). \tag{31}$$

Интегрируя с соответствующим весом уравнения (31), приходим к бесконечным системам

$$
\begin{aligned}
&\psi_n^{(j)} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m d_m a_{nm}\psi_m^{(j)} = g_n^{(j)},\\
&g_n^{(j)} = \int_0^{\pi/2} P_n^-(\cos\theta)\, g_j(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta, \qquad (32)\\
&a_{nm} = \int_0^{\pi/2} P_n^-(\cos\theta)\, P_m^-(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{nA_{nm} - mA_{mn}}{n^2 - m^2}, \qquad n \neq m,\\
&a_{nn} = \int_0^1 \frac{[P_n^-(x)]^2}{1-x}\, dx = \frac{2 - A_{nn}}{2n}, \quad A_{nm} = P_n^+(0)\, P_m^-(0).
\end{aligned}
$$

Формула для a_{nm} ($n \neq m$) вытекает из формулы (2.5) работы [1]. Для получения формулы в особом случае ($n = m$) следует в (23) сделать замену $\cos\theta = x$, разбить после этого интервал интегрирования на два $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ и учесть формулу $P_n^-(-x) = (-1)^{n+1} P_n^+(x)$. В результате получим

$$
\int_0^1 \frac{[P_n^-(x)]^2\, dx}{1-x} + \int_0^1 \frac{[P_n^+(x)]^2\, dx}{1+x} = \frac{2}{n}.
$$

Второе слагаемое в левой части исключим, воспользовавшись равенством

$$
\int_0^1 \frac{[P_n^-(x)]^2\, dx}{1-x} = -\frac{P_n^-(0)\, P_n^+(0)}{n} + \int_0^1 \frac{[P_n^+(x)]^2\, dx}{1+x},
$$

полученным интегрированием по частям с учетом формулы (2.3) работы [1]. Следует иметь в виду, что

$$
A_{nm} = \frac{4\gamma_n\gamma_m}{(-1)^{n+1}\pi nm}\left(\gamma_n = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}\sin\frac{1}{2}\pi n - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\cos\frac{1}{2}\pi n\right).
$$

Эта формула является следствием формул (2.7), (2.8) работы [1] и (52) работы [2]. Аналогично можно получить формулу

$$
g_n^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{\Pi}}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_{nm} d_m \gamma_m m^{-1}.
$$

Для преобразования коэффициентов $q_n^{(1)}$ необходимо задать производную правой части уравнения (14). Эти коэффициенты наиболее просто будут вычисляться, если указанная производная представлена отрезком ряда или полным синус-рядом Фурье. Действительно, пусть

$$
f'_+(x) = \sum_m f_m \sin 2mx, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.
$$

Тогда на основании формулы (22) получаем

$$
g_1(0) = -\sum_m f_m P_{2m}^-(\cos\theta) \qquad (33)
$$

и, следовательно,

$$
g_n^{(1)} = -\sum_m f_m a_{n,2m}.
$$

Важным моментом при решении и исследовании полученных бесконечных систем является получение достаточно простых формул для коэффициентов Фурье ядерной функции $k(x)$. Здесь полезны рекомендации, сделанные в работе [9], где предложен аналогичный метод для уравнений второго рода. При этом может оказаться полезным преобразование второй формулы из вида (15) к виду

$$a_m = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} k'(t)\sin mt\,dt, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

интегрированием по частям.

Заметим еще, что в том достаточно общем для приложений случае, когда ядерная функция представлена в виде (2), для вычисления коэффициентов a_n полезно использование контурного интегрирования. Действительно, подставляя формулу (2) в (15) и учитывая, что $K(t) = K(-t)$, получаем формулу

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(s)\frac{\sin\pi(m+s)}{m+s}ds = \frac{1}{\pi}\int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty} K(s)\frac{\sin\pi(m+s)}{m+s}ds. \tag{35}$$

Второе равенство законно, если $K(s)$ не имеет особых точек на вещественной оси и ε достаточно мало. Если функция K мероморфна с полюсами в точках $s = s_k$, то, используя теорию вычетов, получаем

$$a_m = K(m) + \sum_k \operatorname*{Res}_{S=S_k} \frac{K(s)\,[e_+^{i\pi s} + e_-^{-i\pi s}]}{m+s}, \tag{36}$$

где $e_+^z = \begin{cases} e^z, & \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad e_-^z = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ e^z, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$

В случае же, когда функция $K(s)$ имеет и точки ветвления, то к сумме вычетов добавляются интегралы по соответствующим разрезам. Например, если ядерная функция взята в виде *

$$k_\beta(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}\alpha\beta}{\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha, \tag{37}$$

то формула (36) приводит к результату

$$a_m = \frac{\operatorname{th} m\beta}{m} - \frac{(-1)^m\,2}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp[-\pi^2(2k+1)(2\beta)^{-1}]}{m^2 + \pi^2(2k+1)^2(2\beta)^{-2}}. \tag{38}$$

В соответствии с исследованием, приведенным в работе [1], достаточным условием квази-вполне регулярности бесконечных систем (32) будет убывание коэффициентов d_m не медленнее, чем $Q(m^{-1})$. В этом случае (он, как правило, имеет место в приложениях) является законным применение метода редукции. Применяя этот метод, согласно формулам (30), (31) и (33), получаем приближенное решение интегрального уравнения (24) в виде

$$\psi(\theta) = \sum_{m=1}^{N} A_m P_m^-(\cos\theta). \tag{39}$$

Согласно формуле (26) четное решение исходного интегрального уравнения (14) имеет вид

$$\varphi_+(x) = C_0^+ + \frac{d}{dx}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{N} A_m S_m(\cos x),$$
$$S_m(y) = \int_{\arccos y}^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,P_m^-(\cos\theta)\,d\theta}{(y-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^y \frac{P_{m-1}^{1,0}(r)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}. \tag{40}$$

* К интегральному уравнению (14) с ядром (37) приводится антиплоская (сдвиговая) контактная задача для упругого слоя.

Последнее равенство получено заменой $\cos\theta = \eta$ и использованием одной из следующих формул [7] для многочленов Якоби $P_m^{\alpha,\beta}(x)$:

$$(1-x)P_{n-1}^{1,0}(x) = P_n^-(x), \quad (1+x)P_{n-1}^{0,1}(x) = P_n^+(x).$$

Учитывая рекуррентную формулу (8.961) работы [4], получаем

$$nP_{n-1}^{1,0}(x) = C_{n-1}^{(3/2)}(x) + C_{n-2}^{(3/2)}(x).$$

И, наконец, использовав формулу 10.9 (18) работы [3], для многочленов Гегенбауэра $C_n^{(\lambda)}(x)$ окончательно получим

$$S_m(y) = m^{-1}[C_{m-1}(y) + C_{m-2}(y)]\sqrt{y} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$
$$C_n(y) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{(-1)^m \left(\frac{3}{2}\right)_{n-m}}{m!\left(\frac{1}{2}\right)_{n-2m}}(2y)^{n-2m} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ C_{-1}(y) \equiv 0). \tag{41}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что приближенное решение уравнения (14) выражается через тригонометрические функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.— ПММ, 1967, **31**, № 4.
2. *Бейтмен Г., Эрдейк А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
6. *Попов Г. Я.* О сведении интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам.— ПММ, 1972, **36**, № 4.
7. *Попов Г. Я.* Заметка о многочленах Якоби.— Мат. исслед., 1972, **7**, № 2.
8. *Попов Г. Я.* О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1966, № 4.
9. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами.— ПММ, 1970, **34**, № 4.

Одесский университет

Поступила в редколлегию 5.XI 1974 г.

УДК 539.377

Я. И. Бурак, И. В. Огирко

ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ МАТЕРИАЛА

При осесимметричном нагреве цилиндрической оболочки постоянным по толщине температурным полем система уравнений термоупругости [4] сводится к одному разрешающему уравнению, записанному относительно функции прогиба W и температуры T:

$$F_0 \equiv \frac{d^2}{dx}\left(E_1\frac{d^2W_1}{dx^2}\right) + 4p^4E_1(W_1 - \varepsilon_{T_0}\alpha_1 T_1) = 0, \tag{1}$$

где $T_1 = \frac{T}{T_0}$; $W_1 = \frac{W}{R}$; $E_1(T_1) = \frac{E(T)}{E_0}$; $\alpha_1(T_1) = \frac{\alpha(T)}{\alpha_0}$;

$E(T)$, $\alpha(T)$ — зависящие от температуры модуль упругости и линейный коэффициент температурного расширения; $\varepsilon_{T_0} = \alpha_0 T_0$; E_0 — некоторые характерные значения характеристик материала и температуры; ν — коэф-