

На рис. 1 показано для одной фиксированной шайбы изменение максимального значения изгибающего момента (M_1) по контуру спая шайбы с пластинкой при различных значениях безразмерной частоты: $\omega_0 = \frac{h\omega}{\sqrt{3c_3^2}} =$

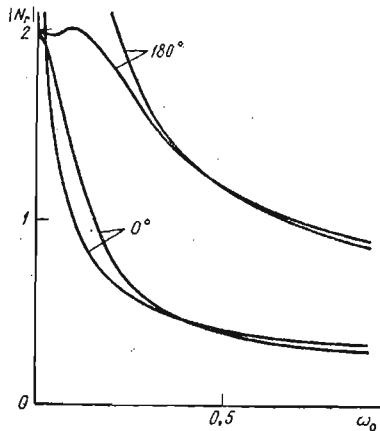


Рис. 3.

$= 0,01; 0,1; 0,5$. Сплошные кривые построены для изотропной ($E = 2 (1 + \nu) G$), штриховые для трансверсально-изотропной ($E = 40 G_2$) пластинки. Изменение изгибающего момента по контуру жесткого включения для различных значений $R_0 = 0,5; 2; 5$ показано на рис. 2. На рис. 3 приведены кривые изменения максимального перерезывающего усилия (N_1) в зависимости от частоты возбуждающей силы ω_0 в точке $\theta = \pi$ на контуре спая жесткой шайбы с пластинкой из трансверсально-изотропного материала.

Для фиксированной в пространстве шайбы с уменьшением частоты динамический коэффициент концентрации для момента и усилий неограниченно возрастает, что следует учитывать при расчетах конструкций, работающих в условиях динамических перемещенных нагрузок. В случае нефиксированного включения усилия и моменты на границе спая при $\omega_0 \rightarrow 0$ будут уже конечными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
2. Гузь А. Н., Головачев В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. К., «Наук. думка», 1972.
3. Гузь А. Н., Головачев В. Т., Черевко М. А. Дифракция антисимметричных волн на ряде круглых вырезов в бесконечной пластинке. — Прикладная механика, 1974, 10, № 8.
4. Грицай С. В., Швец Р. Н. Дифракция изгибной волны на круговом препятствии в трансверсально-изотропной пластинке. — Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». К., Изд-во АН УССР, 1974.
5. Швец Р. Н., Грицай С. В. Динамические напряжения в трансверсально-изотропной пластинке с кольцом равных круговых отверстий. — Математические методы и физико-механические поля, 1976, вып. 3, с. 57—61.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.IX 1974 г.

УДК 539.3

Т. Л. Мартынович, В. В. Божидарник

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С НЕСИММЕТРИЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Пусть срединная плоскость анизотропной пластинки занимает бесконечную область S , ослабленную эллиптическим отверстием L_1 , край которого несимметрично подкреплён упругим стержнем так, что плоскость оси стержня смещена от срединной плоскости пластинки на величину ζ_0^* . Будем считать, что пластинка и подкрепляющий стержень не нагружены, а растягивающие напряжения в удаленных частях пластинки ограничены. В этом случае пластинка испытывает изгибное и обобщенное плоское напряженное состояния.

Будем исходить из области S , заключенной между двумя конфокальными эллипсами L_1 и L_2 , причем внешний контур удален в бесконечность. Эту

область переменной $z = x + iy$ конформно отобразим на кольцо, заключенное между концентрическими окружностями γ_1 и γ_2 радиусов $\rho_1 = 1, \rho_2 = \infty$ плоскости ζ , положив

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad |m| < 1, \quad (1)$$

где $R = \frac{a_1 + b_1}{2}$; $m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}$; a_1, b_1 — полуоси эллипса L_1 . Тогда функции

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = R_j \left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right), \quad |m_j| < 1; \quad (2)$$

$$z_j^* = \omega_j^*(\zeta_j^*) = R_j^* \left(\zeta_j^* + \frac{m_j^*}{\zeta_j^*} \right), \quad |m_j^*| < 1 \quad (j = 1, 2),$$

где

$$R_j = \frac{R}{2} [(1 - is_j) + m(1 + is_j)], \quad m_j = \frac{(1 + is_j) + m(1 - is_j)}{(1 - is_j) + m(1 + is_j)}; \quad (3)$$

$$R_j^* = \frac{R}{2} [(1 - i\mu_j) + m(1 + i\mu_j)], \quad m_j^* = \frac{(1 + i\mu_j) + m(1 - i\mu_j)}{(1 - i\mu_j) + m(1 + i\mu_j)}$$

будут также конформно переводить соответствующие области изменения $z_j = x + s_j y$ и $z_j^* = x + \mu_j y$ на внешность единичного круга γ_1 , причем для контурных точек γ_1 переменные $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1^*, \zeta_2^*$ принимают одно и то же значение $\sigma = e^{i\theta}$.

В преобразованной области краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dU &= -\frac{q}{2h} \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{\eta_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_b}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right] - \\ &\quad - \frac{q}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \overline{F_1(\sigma)} d\bar{\sigma}, \\ \int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dU &= \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{\eta_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_b}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 F_1(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right] - \\ &\quad - \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} F_1(\sigma) d\sigma; \quad (4) \\ \int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dV &= \int_{\gamma_1} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i \frac{(r_1 - r_0) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_b}{d\sigma} + i\theta_b - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r_1} \theta_\tau \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma, \\ \int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dV &= \int_{\gamma_1} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i \frac{(r_1 - r_0) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_b}{d\sigma} + i\theta_b - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r_1} \theta_\tau \right) \right] F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma, \\ \int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dV^* &= - \int_{\gamma_1} \frac{r_1}{r_0} \left[\frac{C}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_\tau}{d\sigma} - i \frac{A}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_n}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{r_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_n + iA\theta_\tau) \right] \times \\ &\quad \times \overline{F_1(\sigma)} d\bar{\sigma} - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \overline{F_1(\sigma)} d\bar{\sigma} - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\eta_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_b}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right], \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dV^* = - \int_{\gamma_1} \frac{r_1}{r_0} \left[\frac{C}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_\tau}{d\sigma} - i \frac{A}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_n}{d\sigma} + \frac{i\sigma\omega'(\sigma)}{r_1|\omega'(\sigma)|} (C\theta_n + i\theta_\tau A) \right] \times$$

$$\times F_1(\sigma) d\sigma - \xi_0^* g \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} F_1(\sigma) d\sigma + \xi_0^* g \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + \right.$$

$$\left. + i \frac{\eta_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_b}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 F_1(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right],$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dU^* = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\tau - i \left(\frac{r_0}{r_1} \theta_n - i \frac{(r_1 - r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\tau}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} d\bar{\sigma},$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dU^* = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\tau - i \left(\frac{r_0}{r_1} \theta_n - i \frac{(r_1 - r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\tau}{d\sigma} \right) \right] F_1(\sigma) d\sigma.$$

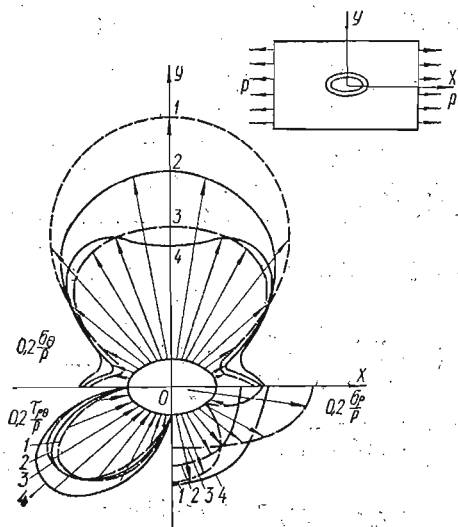


Рис. 1

Здесь $\sigma = e^{i\theta}$ — аффикс точки контура γ_1 ; $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ — произвольная функция, голоморфная в преобразованной области; U, V, U^*, V^* — известные функции, выражающиеся через комплексные потенциалы; g, A и C — жесткости криволинейного стержня на растяжение, изгиб и кручение; r_1 — радиус кривизны крайнего волокна стержня, спаянного с пластиной; r_0 — радиус кривизны нейтрального (для чистого изгиба) волокна стержня L_0 , находящегося на расстоянии η_0 от центральной оси; e_0 — относительное удлинение волокна L_0 ; θ_n, θ_τ и θ_b — углы поворота поперечного сечения стержня.

Комплексные потенциалы $\varphi_{*j}(\zeta_j) = \varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]$, $\varphi_{*j}^*(\zeta_j^*) = \varphi_j^*[\omega_j^*(\zeta_j^*)]$ и произвольная функция $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$

вне единичной окружности γ_1 допускают разложения

$$\varphi_{*1}(\zeta_1) = R_1 A_0^* \zeta_1 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta_1^{-k}, \quad \varphi_{*2}(\zeta_2) = R_2 (B_0^* + iC_0^*) \zeta_2 + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta_2^{-k}, \quad (5)$$

$$\varphi_{*1}^*(\zeta_1^*) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta_1^{*-k}, \quad \varphi_{*2}^*(\zeta_2^*) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta_2^{*-k}, \quad F_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}.$$

Постоянные A_0^*, B_0^*, C_0^* определяются из условий на бесконечности пластинок по известным формулам [1].

Величины $e_0, \theta_b, \theta_n, \theta_\tau$, описывающие деформацию подкрепляющего стержня, представим на γ_1 в форме комплексных рядов Фурье:

$$e_0 = \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k, \quad \theta_b = \beta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k, \quad (6)$$

$$\theta_n = \gamma_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sigma^k, \quad \theta_\tau = \delta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sigma^k.$$

Подставим выражения (5), (6) в граничные условия (4) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ_1 . Полагая при этом все E_j , кроме E_n , равными нулю, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций $\varphi_{*j}(\zeta_j)$, $\varphi_{*j}^*(\zeta_j^*)$, $e_0, \theta_n, \theta_b, \theta_\tau$ ($j = 1, 2$). Напряжения, возникающие в по-

перечном сечении кольца, вычисляются по формуле [2]

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} e_0 + i \frac{2\sigma}{r} \frac{d\theta_b}{d\sigma} - \zeta \left(\frac{i\sigma}{r} \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \frac{1}{r} \theta_\tau \right) \right]. \quad (7)$$

Для примера в качестве ортотропной пластинки возьмем стеклотекстолит КАСТ-В [5] и кольцо прямоугольного сечения $2h^* \times b$ из дюралюминия с упругими геометрическими характеристиками:

$$E_1 = 1,93 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \quad E_2 = 1,33 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \\ G = 0,32 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \quad \nu_2 = 0,12, \quad E^* = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad (8)$$

$$\delta = \frac{b}{R} = 0,1, \quad \frac{2h^*}{2h} = 3, \quad \frac{2h^*}{b} = 3, \quad \frac{\zeta_0^*}{2h} = 1.$$

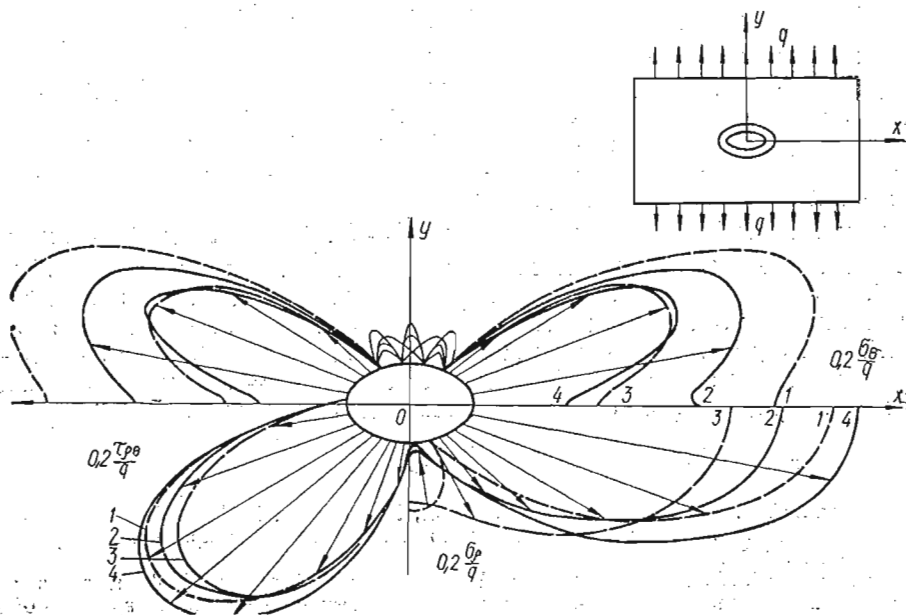


Рис. 2

Пластинка растягивается в главных направлениях упругости x ($E_x = E_1$) и y ($E_y = E_2$) усилиями $\sigma_x^\infty = p$ и $\sigma_y^\infty = q$. На рис. 1, 2 представлены эпюры распределения кольцевых напряжений σ_θ (I и II четверть), радикальных напряжений σ_ρ (IV четверть) и касательных $\tau_{\rho\theta}$ (III четверть) в пластинке вдоль поверхности спая с кольцом при заданном нагружении пластинки на бесконечности, указанном на рисунках. Кривые 1—3 соответствуют точкам верхней, срединной и нижней плоскостей пластинки при $\zeta_0^* = 2h$. Для

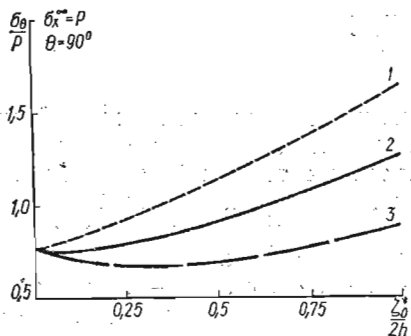


Рис. 3

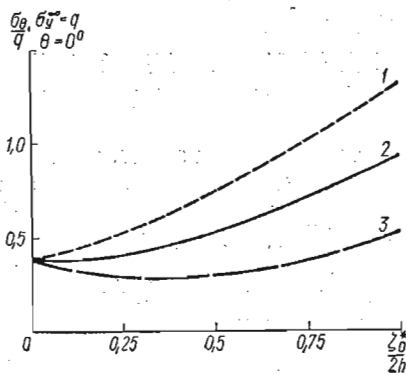


Рис. 4

θ	$\zeta_0^* = 2h$						$\zeta_0^* = 0$					
	$\sigma_x^\infty = p$			$\sigma_y^\infty = q$			$\sigma_x^\infty = p$			$\sigma_y^\infty = q$		
	σ_1/p	σ_0/p	σ_2/p	σ_1/q	σ_0/q	σ_2/q	σ_1/p	σ_0/p	σ_2/p	σ_1/q	σ_0/q	σ_2/q
0°	1,49	0,75	0,11	4,02	6,88	9,84	1,35	0,20	-0,95	0,90	3,76	6,69
10°	1,50	0,84	0,27	4,07	6,61	9,22	1,31	0,31	-0,69	1,09	3,61	6,19
20°	1,57	1,16	0,80	4,10	5,82	7,59	1,24	0,61	-0,02	1,53	3,19	4,90
30°	1,83	1,75	1,69	3,89	4,64	5,43	1,24	1,04	0,85	1,91	2,59	3,29
40°	2,29	2,50	2,72	3,33	3,30	3,29	1,38	1,53	1,70	2,00	1,89	1,80
50°	2,87	3,27	3,68	2,51	1,99	1,48	1,64	2,02	2,40	1,79	1,21	0,63
60°	3,47	3,96	4,46	1,62	0,86	0,11	1,96	2,44	2,93	1,42	0,60	-0,21
70°	3,96	4,49	5,02	0,86	0,01	-0,84	2,25	2,77	3,29	1,04	0,14	-0,75
80°	4,28	4,82	5,35	0,36	-0,52	-1,40	2,44	2,97	3,51	0,78	-0,14	-1,06
90°	4,40	4,93	5,47	0,19	-0,69	-1,58	2,51	3,04	3,58	0,68	-0,24	-1,17

сравнения приведены кривые 4, характеризующие распределение этих напряжений при симметричном подкреплении ($\zeta_0^* = 0$). Зависимость напряжений σ_0 в пластинке от эксцентриситета подкрепления ζ_0^* представлена на рис. 3, 4.

В таблице помещены значения нормальных напряжений σ в поперечном сечении кольца: σ_1 соответствует точкам сечения кольца, совпадающим с линией спая L_1 ($r = r_1$), σ_0 — точкам нейтрального волокна L_0 ($r = r_0$) и σ_2 — точкам внутреннего (крайнего) волокна кольца L_2 ($r = r_2$), лежащим в плоскости, совпадающей со срединной плоскостью пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
2. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис. Львов, 1970.
3. Мартынович Т. Л., Божидарник В. В. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленим краєм. — Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Механіка, математика, 1972, № 7, с. 112—118.
4. Мартынович Т. Л., Божидарник В. В., Максимович Ю. М. Влияние эксцентриситета подкрепления края отверстия на напряженное состояние в анизотропной пластинке. — Механика полимеров, 1974, № 2, с. 285—293.
5. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластинки. М., Оборонгиз, 1960.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
16.IX 1974 г.

УДК 539.3

Б. Л. Пелех

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Метод сопряженных задач, позволяющий по известному решению какой-либо задачи строить решения задач, соответствующих некоторым иным граничным условиям, разработан в классической теории тонких оболочек Кирхгофа — Лява [1, 6]. В данной работе этот метод распространяется на теорию оболочек, построенную с учетом влияния деформаций поперечного сдвига.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины, срединная поверхность которой отнесена к линиям кривизны, а $\alpha_1, \alpha_2, A_1, A_2, k_1, k_2$ — соответственно коэффициенты Ляме и главные кривизны. В случае однородной задачи теории типа Тимошенко комплексные усилия вводятся следующим образом