

$T^{(j)}$ и определим из уравнений (7), (8) при краевых условиях

$$U^{(j)} = 0, T^{(j)}_n = 0 \text{ на } S_1, p_i^{(j)} = \sigma_{ij}^{(j)} n_j = 0, T^{(j)} = 0 \text{ на } S_2, \\ U^{(j)}(x, \xi, 0) = 0, U^{(j)}(x, \xi, \tau) = 0, T^{(j)}(x, \xi, 0) = 0, T^{(j)}(x, \xi, \tau) = 0. \quad (22)$$

Учитывая, что $X_i = \delta(x - \xi) \delta(\tau) \delta_{ij}$, $\omega' = 0$, и найденные величины $U^{(j)}$ и $T^{(j)}$, из уравнения взаимности приходим к уравнению

$$u_j(x, \tau) + \tau u_{j, \tau}(x, \tau) = \int_{\Omega} dV \int_0^{\tau} X_i(x, \tau - \tau_0) l_0 \frac{\partial U_i^{(j)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 - \\ - \frac{1}{l_0} \int_{\Omega} dV \int_0^{\tau} \omega(x, \tau - \tau_0) l_0 T^{(j)}(x, \xi, \tau_0) d\tau_0 + \\ + \int_{S_2} dS \int_0^{\tau} p_i(x, \tau - \tau_0) l_0 \frac{\partial U_i^{(j)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 - \int_{S_1} dS \int_0^{\tau} p_i^{(j)}(x, \tau - \tau_0) \times \\ \times l_0 \frac{\partial u_i(x, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \lambda_{ij} \int_{S_2} dS \int_0^{\tau} T_0(x, \tau - \tau_0) T_{,n}^{(j)}(x, \xi, \tau_0) d\tau_0 - \\ - \lambda_{ij} \int_{S_1} dS \int_0^{\tau} T^{(j)}(x, \xi, \tau - \tau_0) T_0(x, \tau_0) d\tau_0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (23)$$

где $l_n = T_0$ на S_1 , которое вместе с уравнением (21) представляет уравнение Майзеля для обобщенных динамических задач термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.IX 1974 г.

УДК 539.3

С. В. Грицай, Р. Н. Швец

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН ИЗГИБА НА ДВУХ КРУГОВЫХ ШАЙБАХ, ВПАЯННЫХ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ ПЛАСТИНКУ

Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим бесконечную тонкую трансверсально-изотропную пластинку с впаянными двумя жесткими круговыми шайбами радиуса R , центры которых размещены по оси x на расстоянии δ . В центре каждой шайбы поместим начало полярной системы координат r_k, θ_k ($k = 1, 2$). В рамках теории типа Тимошенко задача об установившихся колебаниях пластинки сводится к решению трех уравнений Гельмгольца [4, 5]

$$\Delta \tilde{w}_1 + \alpha^2 \tilde{w}_1 = 0; \quad \Delta \tilde{w}_2 - \beta^2 \tilde{w}_2 = 0; \quad (1)$$

$$\Delta \Phi - \gamma^2 \Phi = 0,$$

где

$$\alpha^2, \beta^2 = \frac{\omega_1}{2} \sqrt{\omega_1^2 (1 + c_0^2)^2 + 4c_0^2 \left(\frac{1}{\nu} - \omega_1^2 \right)} \pm \frac{\omega_1^2}{2} (1 + c_0^2);$$

$$\gamma^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}(1 - \varepsilon\omega_1^2); \quad c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}; \quad c_3^2 = \frac{k'G_z}{\rho}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{G_z};$$

$$\omega_1 = \frac{\dot{\omega}}{c_1}; \quad c_0 = \frac{c_1}{c_3}; \quad \Delta_1 = \Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \quad \tilde{w} - \text{функция прогиба}; \quad \Phi - \text{функ-}$$

ция сдвига; E — модуль Юнга в плоскости пластинки; G_z — модуль сдвига в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинки; k' — коэффициент сдвига; ν — коэффициент Пуассона; Δ — двумерный оператор Лапласа; ρ — плотность пластинки. При этом прогиб w и углы поворота γ_r и γ_θ через функции \tilde{w} и Φ выражаются так:

$$w = \tilde{w} - \varepsilon \Delta_1 \tilde{w}; \quad \gamma_r = -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad \gamma_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (2)$$

Пусть в данной пластинке в положительном направлении оси y распространяется изгибная волна вида

$$\tilde{w}_1^{(i)} = \tilde{w}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varepsilon_n [1 + (-1)^n] \cos n\theta_2 + i [1 - (-1)^n] \sin n\theta_2 \} J_n(\alpha r_2) e^{-i\omega\tau}, \quad (3)$$

вызванная периодически изменяющейся во времени нагрузкой и приложенной к пластинке на достаточном удалении от включений. Здесь $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_n = 1$ ($n \neq 0$); ω — круговая частота возмущающей силы; \tilde{w}_0 — амплитуда волны; τ — время.

Встречая при распространении преграду в виде круговых шайб, плоская изгибная волна (3) рассеивается и тем самым создает вокруг неоднородностей дополнительные напряжения. Рассеянные изгибные волны в локальной полярной системе координат (r_k, θ_k) , с учетом симметрии задачи относительно оси y , описываются соотношениями

$$\tilde{w}^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ [a_n H_n^{(1)}(\alpha r_1) + c_n K_n(\beta r_1)] \cos n\theta_1 + [b_n H_n^{(1)}(\alpha r_1) + d_n K_n(\beta r_1)] \sin n\theta_1 +$$

$$+ (-1)^n [a_n H_n^{(1)}(\alpha r_2) + c_n K_n(\beta r_2)] \cos n\theta_2 + (-1)^{n+1} [b_n H_n^{(1)}(\alpha r_2) +$$

$$+ d_n K_n(\beta r_2)] \sin n\theta_2 \}, \quad (4)$$

$$\Phi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ [q_n \cos n\theta_1 + f_n \sin n\theta_1] K_n(\gamma r_1) + (-1)^{n+1} \times$$

$$\times [q_n \cos n\theta_2 - f_n \sin n\theta_2] K_n(\gamma r_2) \},$$

где $H_n^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода (ее индекс в дальнейшем будем опускать), $K_n(z)$ — функция Макдональда. Здесь и в дальнейшем множитель $e^{-i\omega\tau}$ опускаем для сокращения записи.

Решение (4) выбрано в соответствии с принципом излучения. Полное смещение \tilde{w} срединной поверхности пластинки, содержащей круговые неоднородности, можно записать как сумму вкладов падающей и рассеянных волн:

$$\tilde{w} = \tilde{w}_1^{(i)} + \tilde{w}^{(s)}. \quad (5)$$

Неизвестные коэффициенты $a_n, b_n, c_n, d_n, q_n, f_n$ в выражениях (4) определяются из условий, заданных на границе спая включения и пластинки.

Граничные условия. Под действием падающей волны изгиба включения будут перемещаться как жесткое целое. Обозначая нормальные перемещения шайб и их повороты через $W^{(k)}, \vartheta_1^{(k)}, \vartheta_2^{(k)}$, условия на границе ($r_k = R$) спаев шайб и пластины можно представить в виде

$$w = W^{(k)},$$

$$\gamma_r^{(k)} = -\vartheta_1^{(k)} \cos \theta_k - \vartheta_2^{(k)} \sin \theta_k; \quad \gamma_\theta^{(k)} = \vartheta_1^{(k)} \sin \theta_k - \vartheta_2^{(k)} \cos \theta_k. \quad (6)$$

В случае установившихся колебаний $W^{(k)}$, $\vartheta_1^{(k)}$, $\vartheta_2^{(k)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 W^{(k)} &= -\frac{1}{2\pi h R \rho_0 \omega^2} \int_0^{2\pi} N_r^{(k)} d\theta_k + R [\vartheta_1^{(k)} \cos \theta_k + \vartheta_2^{(k)} \sin \theta_k]; \\
 \vartheta_1^{(k)} &= -\frac{2}{\pi h R^3 \rho_0 \omega^2 \left(1 + \frac{1}{3} h_0^2\right)} \int_0^{2\pi} [M_r^{(k)} \cos \theta_k - M_{r\theta}^{(k)} \sin \theta_k] d\theta_k; \\
 \vartheta_2^{(k)} &= \frac{2}{\pi h R^3 \rho_0 \omega^2 \left(1 + \frac{1}{3} h_0^2\right)} \int_0^{2\pi} [M_r^{(k)} \sin \theta_k + M_{r\theta}^{(k)} \cos \theta_k] d\theta_k,
 \end{aligned} \quad (7)$$

где $h_0 = \frac{h}{R}$; ρ_0 — плотность шайбы.

Произвольные постоянные в решениях (4) можно определить, удовлетворяя граничным условиям на любом из контуров L_k , например, на L_2 , который примем за основной [2]. Для этого, используя теорему сложения цилиндрических функций [1], решения (4) запишем в системе координат (r_2, θ_2) . После некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}^{(s)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ [(-1)^n a_n H_n^-(\alpha r_2) + (-1)^n c_n K_n(\beta r_2) + \varepsilon_n S_n^{(1)} J_n(\alpha r_2) + \\
 &+ \varepsilon_n Q_n^{(1)} I_n(\beta r_2)] \cos n\theta_2 + [(-1)^{n+1} b_n H_n(\alpha r_2) + (-1)^{n+1} d_n K_n(\beta r_2) + \\
 &+ S_n^{(2)} J_n(\alpha r_2) + Q_n^{(2)} I_n(\beta r_2)] \sin n\theta_2 \}; \\
 \Phi^{(s)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ [(-1)^{n+1} q_n K_n^-(\gamma r_2) + \varepsilon_n P_n^{(2)} I_n(\gamma r_2)] \cos n\theta_2 + \\
 &+ [(-1)^n f_n K_n(\gamma r_2) + P_n^{(1)} I_n(\gamma r_2)] \sin n\theta_2 \}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 S_n^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p [H_{p-n}(\alpha\delta) + (-1)^n H_{p+n}(\alpha\delta)]; \\
 S_n^{(2)} &= \sum_{p=0}^{\infty} b_p [H_{p-n}(\alpha\delta) - (-1)^n H_{p+n}(\alpha\delta)]; \\
 Q_n^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} c_p [K_{p-n}(\beta\delta) + (-1)^n K_{p+n}(\beta\delta)]; \\
 Q_n^{(2)} &= \sum_{p=0}^{\infty} d_p [K_{p-n}(\beta\delta) - (-1)^n K_{p+n}(\beta\delta)]; \\
 P_n^{(2)} &= \sum_{p=0}^{\infty} q_p [K_{p-n}(\gamma\delta) + (-1)^n K_{p+n}(\gamma\delta)]; \\
 P_n^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} f_p [K_{p-n}(\gamma\delta) - (-1)^n K_{p+n}(\gamma\delta)].
 \end{aligned} \quad (9)$$

Выполняя вычисления в соотношениях (7), для основной шайбы находим

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &= \sigma \{ a_1 \alpha_2 H_1(\alpha R) - c_1 \beta_2 K_1(\beta R) + f_1 \gamma_2 K_1(\gamma R) - S_1^{(1)} \alpha_2 J_1(\alpha R) + \\
 &+ Q_1^{(1)} \beta_2 I_1(\beta R) - P_1^{(1)} \gamma_2 I_1(\gamma R) \}; \\
 \vartheta_2 &= \sigma \{ b_1 \alpha_2 H_1(\alpha R) - d_1 \beta_2 K_1(\beta R) - q_1 \gamma_2 K_1(\gamma R) + (2i\tilde{w}_0 + S_1^{(2)}) \alpha_2 J_1(\alpha R) - \\
 &- Q_1^{(2)} \beta_2 I_1(\beta R) - P_1^{(2)} \gamma_2 I_1(\gamma R) \};
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$W = \frac{2h_0^2}{3\omega_1^2} \mu \left[a_0 \alpha_3 H_1(\alpha R) - c_0 \beta_3 K_1(\beta R) + (\tilde{\omega}_0 + \frac{1}{2} S_0^{(1)}) \alpha_3 J_1(\alpha R) + \frac{1}{2} Q_0^{(1)} \beta_3 I_1(\beta R) \right] +$$

$$+ \sigma \{ [a_1 \alpha_2 H_1(\alpha R) - c_1 \beta_2 K_1(\beta R) + f_1 \gamma_2 K_1(\gamma R) - S_1^{(1)} \alpha_2 J_1(\alpha R) + Q_1^{(1)} \beta_2 I_1(\beta R) -$$

$$- P_1^{(1)} \gamma_2 J_1(\gamma R)] \cos \theta_2 + [b_1 \alpha_2 H_1(\alpha R) - d_1 \beta_2 K_1(\beta R) - q_1 \gamma_2 K_2(\gamma R) +$$

$$+ (2i\tilde{\omega}_0 + S_1^{(2)}) \alpha_2 J_1(\alpha R) - Q_1^{(2)} \beta_2 I_1(\beta R) - P_1^{(2)} \gamma_2 J_1(\gamma R)] \sin \theta_2 \},$$

где

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{1-\nu}{hR\omega_1^2} h_0^3 \mu; \quad \alpha_2 = \frac{\alpha^2 R^2}{1-\nu}; \quad \beta_2 = \frac{\beta^2 R^2}{1-\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{\gamma^2 R^2}{2}; \quad (11)$$

$$\alpha_3 = (\alpha^2 - \omega_1^2) \alpha R; \quad \beta_3 = (\beta^2 + \omega_1^2) \beta R; \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Подставляя выражения (8), (10) в граничные условия (6), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (-1)^n [a_n \alpha_1 H_n(\alpha R) + c_n \beta_1 K_n(\beta R)] + [(1 + (-1)^n) \tilde{\omega}_0 + S_n^{(1)}] \varepsilon_n \alpha_1 J_n(\alpha R) +$$

$$+ \varepsilon_n \beta_1 Q_n^{(1)} I_n(\beta R) \} \cos n\theta_2 + \{ (-1)^{n+1} [b_n \alpha_1 H_n(\alpha R) + d_n \beta_1 K_n(\beta R)] +$$

$$+ [(1 - (-1)^n) i\tilde{\omega}_0 + S_n^{(2)}] \alpha_1 J_n(\alpha R) + \beta_1 Q_n^{(2)} I_n(\beta R) \} \sin n\theta_2 = W;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (-1)^n [a_n R H_n(\alpha R) + c_n R K_n(\beta R) - f_n n K_n(\gamma R)] + [(1 + (-1)^n) \tilde{\omega}_0 +$$

$$+ S_n^{(1)}] \varepsilon_n R J_n(\alpha R) + \varepsilon_n Q_n^{(1)} R I_n(\beta R) - n P_n^{(1)} I_n(\gamma R) \} \cos n\theta_2 +$$

$$+ \{ (-1)^{n+1} [b_n R H_n(\alpha R) + d_n R K_n(\beta R) + q_n n K_n(\gamma R)] +$$

$$+ [(1 - (-1)^n) i\tilde{\omega}_0 + S_n^{(2)}] R J_n(\alpha R) + Q_n^{(2)} R I_n(\beta R) + n \varepsilon_n P_n^{(2)} I_n(\gamma R) \} \sin n\theta_2 =$$

$$= R(\vartheta_1 \cos \theta_2 + \vartheta_2 \sin \theta_2); \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (-1)^n [a_n n H_n(\alpha R) + c_n n K_n(\beta R) - f_n R K_n(\gamma R)] +$$

$$+ [(1 + (-1)^n) \tilde{\omega}_0 + S_n^{(1)}] n \varepsilon_n J_n(\alpha R) + n \varepsilon_n Q_n^{(1)} I_n(\beta R) - R P_n^{(1)} I_n(\gamma R) \} \sin n\theta_2 +$$

$$+ \{ (-1)^n [b_n n H_n(\alpha R) + d_n n K_n(\beta R) + q_n R K_n(\gamma R)] - [(1 - (-1)^n) i\tilde{\omega}_0 + S_n^{(2)}] \times$$

$$\times n J_n(\alpha R) - n Q_n^{(2)} I_n(\beta R) - \varepsilon_n P_n^{(2)} R I_n(\gamma R) \} \cos n\theta_2 = R(\vartheta_1 \sin \theta_2 - \vartheta_2 \cos \theta_2),$$

где $\alpha_1 = 1 + \varepsilon \alpha^2 - \varepsilon \omega_1^2$; $\beta_1 = 1 - \varepsilon \beta^2 - \varepsilon \omega_1^2$; $\vartheta_1, \vartheta_2, W$ определяются выражениями (10), а через $Z_n'(z)$ обозначены производные цилиндрических функций по аргументу.

Из выражений (12) получаем две бесконечные системы алгебраических уравнений для определения постоянных a_n, b_n, \dots, f_n :

$$a_n A_n^{(s)} + c_n C_n^{(s)} + f_n F_n^{(s)} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{n+p} [a_p A_{np}^{(s)} + c_p C_{np}^{(s)} + f_p F_{np}^{(s)}] = q_{ns}; \quad (13)$$

$$b_n B_n^{(s)} + d_n D_n^{(s)} + q_n Q_n^{(s)} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{n+p} [b_p B_{np}^{(s)} + d_p D_{np}^{(s)} + q_p Q_{np}^{(s)}] = p_{ns}$$

$$(s = 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь $A_n^{(s)}, B_n^{(s)}, \dots, p_{ns}$ являются некоторыми комбинациями цилиндрических функций. Можно показать [2, 3], что полученные системы относятся к классу с определителями нормального типа, т. е. их приближенное решение можно находить методом редукции. При этом граничные условия будут удовлетворены приближенно.

Полагая в формулах (10) — (13) параметр $\mu = 0$, получаем результаты для случая, когда шайбы зафиксированы в пространстве.

По известным формулам [4] определяем изгибающие моменты и перерезывающие усилия, которые зависят от частоты возбуждающей силы ω , а также от анизотропных свойств материала.

В случае одной жесткой шайбы получаем

$$\begin{aligned}
 [M_r]_{r=R} = & -\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \left\{ \frac{i}{\Delta_0} [\alpha^2 \eta \beta R K_1(\beta R) + (1 - \varepsilon \omega_1^2) K_0(\beta R)] + \right. \\
 & + \frac{2}{\Delta_1} (1 - \varepsilon \omega_1^2) [(1 + a\mu) K_1(\gamma R) - \gamma R K_2(\gamma R)] \cos \theta - \\
 & \left. - 2(1 - \varepsilon \omega_1^2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{\Delta_n} [n K_n(\gamma R) - \gamma R K_{n+1}(\gamma R)] K_n(\beta R) \cos n\theta \right\}; \\
 [N_r]_{r=R} = & \frac{2}{\pi \alpha R} \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \left\{ \frac{i \alpha_1}{\Delta_0} \beta R K_1(\beta R) + \frac{2}{\Delta_1} [\alpha_1 (1 + a\mu) \beta R K_2(\beta R) \times \right. \\
 & \times K_1(\gamma R) + (\alpha_1 (1 + a\mu) K_1(\beta R) - \alpha_1^* \beta R K_2(\beta R)) \gamma R K_2(\gamma R)] \cos \theta - \\
 & \left. - 2 \alpha_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{\Delta_n} [(n K_n(\gamma R) - \gamma R K_{n+1}(\gamma R)) \beta R K_{n+1}(\beta R) + \right. \\
 & \left. + n \gamma R K_n(\beta R) K_{n+1}(\gamma R)] \cos n\theta \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } \Delta_0 = & \alpha^2 \eta \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \alpha \beta R^2 H_1(\alpha R) K_1(\beta R) - \alpha_1 \beta R H_0(\alpha R) K_1(\beta R) + \\
 & + \beta_1 \alpha R H_1(\alpha R) K_0(\beta R);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = & \alpha_1 (1 + a\mu) [\beta R H_1(\alpha R) K_2(\beta R) - \alpha R H_2(\alpha R) K_1(\beta R)] K_1(\gamma R) + \\
 & + \left[\varepsilon \alpha^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) (1 + a\mu) H_1(\alpha R) K_1(\beta R) - \alpha_1^* \beta R H_1(\alpha R) K_2(\beta R) + \right. \\
 & \left. + \beta_1^* \alpha R H_2(\alpha R) K_1(\beta R) \right] \gamma R K_2(\gamma R);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_n = & \varepsilon \alpha^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) n \gamma R H_n(\alpha R) K_n(\beta R) K_{n+1}(\gamma R) + \\
 & + [n K_n(\gamma R) - \gamma R K_{n+1}(\gamma R)] [\alpha_1 \beta R H_n(\alpha R) K_{n+1}(\beta R) - \beta_1 \alpha R H_{n+1}(\alpha R) K_n(\beta R)];
 \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\mu h_0^2}{\omega_1^2}; \quad \alpha_1^* = \alpha_1 + \sigma \alpha_2; \quad \beta_1^* = \beta_1 - \sigma \beta_2; \quad a = \frac{4}{4 + 3R_0^2}; \quad R_0 = \frac{R}{h}.$$

Приведенные моменты M_r и усилия N_r отнесены к максимальному значению момента в бесконечной сплошной пластинке $M_0 = \alpha^2 \tilde{\omega} D$.

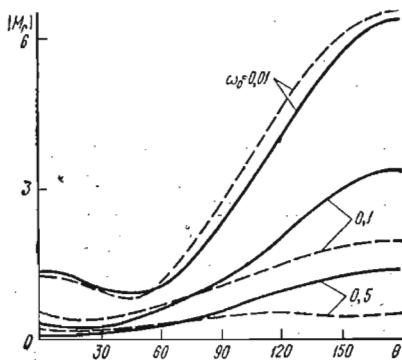


Рис. 1

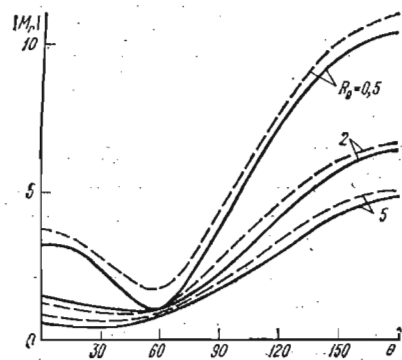


Рис. 2

На рис. 1 показано для одной фиксированной шайбы изменение максимального значения изгибающего момента (M_1) по контуру спая шайбы с пластинкой при различных значениях безразмерной частоты: $\omega_0 = \frac{h\omega}{\sqrt{3c_3^2}} =$

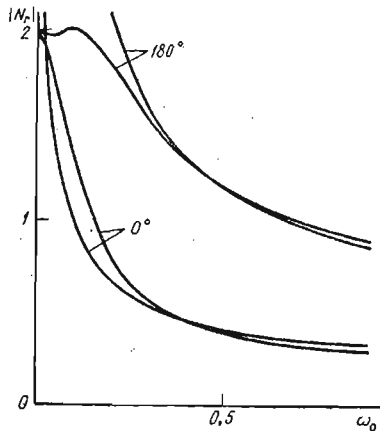


Рис. 3.

$= 0,01; 0,1; 0,5$. Сплошные кривые построены для изотропной ($E = 2 (1 + \nu) G$), штриховые для трансверсально-изотропной ($E = 40 G_2$) пластинки. Изменение изгибающего момента по контуру жесткого включения для различных значений $R_0 = 0,5; 2; 5$ показано на рис. 2. На рис. 3 приведены кривые изменения максимального перерезывающего усилия (N_1) в зависимости от частоты возбуждающей силы ω_0 в точке $\theta = \pi$ на контуре спая жесткой шайбы с пластинкой из трансверсально-изотропного материала.

Для фиксированной в пространстве шайбы с уменьшением частоты динамический коэффициент концентрации для момента и усилий неограниченно возрастает, что следует учитывать при расчетах конструкций, работающих в условиях динамических перемещенных нагрузок. В случае нефиксированного включения усилия и моменты на границе спая при $\omega_0 \rightarrow 0$ будут уже конечными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
2. Гузь А. Н., Головачев В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. К., «Наук. думка», 1972.
3. Гузь А. Н., Головачев В. Т., Черевко М. А. Дифракция антисимметричных волн на ряде круглых вырезов в бесконечной пластинке. — Прикладная механика, 1974, 10, № 8.
4. Грицай С. В., Швец Р. Н. Дифракция изгибной волны на круговом препятствии в трансверсально-изотропной пластинке. — Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». К., Изд-во АН УССР, 1974.
5. Швец Р. Н., Грицай С. В. Динамические напряжения в трансверсально-изотропной пластинке с кольцом равных круговых отверстий. — Математические методы и физико-механические поля, 1976, вып. 3, с. 57—61.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 10.IX 1974 г.

УДК 539.3

Т. Л. Мартынович, В. В. Божидарник

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С НЕСИММЕТРИЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Пусть срединная плоскость анизотропной пластинки занимает бесконечную область S , ослабленную эллиптическим отверстием L_1 , край которого несимметрично подкреплён упругим стержнем так, что плоскость оси стержня смещена от срединной плоскости пластинки на величину ζ_0^* . Будем считать, что пластинка и подкрепляющий стержень не нагружены, а растягивающие напряжения в удаленных частях пластинки ограничены. В этом случае пластинка испытывает изгибное и обобщенное плоское напряженное состояния.

Будем исходить из области S , заключенной между двумя конфокальными эллипсами L_1 и L_2 , причем внешний контур удален в бесконечность. Эту