УДК 539.377

Ю. М. Коляно, Е. П. Хомякевич

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБОБЩЕННОЙ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Теорема взаимности. Рассмотрим две системы величин: первая содержит массовые силы X_i, поверхностные нагрузки p_i, источники тепла w и поверхностный нагрев h, вызываемые в анизотропном теле перемещения u_i, и температуру t; вторую систему соответствующих величин отметим штрихами.

Уравнение первой части теоремы взаимности, как известно [2], имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} (\overline{X}_i\overline{u}_i' - \overline{X}_i'\overline{u}_i)\, dV + \int\limits_{S} (\overline{p}_i\overline{u}_i' - \overline{p}_i'\overline{u}_i)\, dS + \beta_{ij} \int\limits_{\Omega} (\overline{e}_{ij}'\overline{t} - \overline{e}_{ij}\overline{t}')\, dV = 0, \qquad (1)$$

где $\beta_{ij} = c_{ijkl}\alpha_{kl}$; c_{ijkl} — упругие постоянные; α_{kl} — коэффициенты теплового расширения; e_{ij} — компоненты деформации; Ω — область интегрирования; S — поверхность, ограничивающая эту область.

Для получения второй части теоремы взаимности рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\lambda_{ij}t_{,ij} - cl\dot{t} - t_0\beta_{ij}l\dot{e}_{ij} = -lw, \qquad (2)$$

$$\lambda_{ij}t'_{,ij} - cl\dot{t}' - t_0\beta_{ij}l\dot{e}'_{ij} = -lw', \qquad (3)$$

где λ_{ij} — коэффициенты теплопроводности; c — объемная теплоемкость; $l = 1 + \tau_r\frac{\partial}{\partial\tau}$, τ_r — время релаксации теплового потока [1]; τ — время; t_0 — температура тела в недеформированном состоянии.

Применяя к уравнениям (2), (3) преобразование Лапласа при однородных начальных условиях, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}\overline{t}_{,ij} &= t_0\beta_{ij}(p + \tau_r p^2)\overline{e}_{ij} + c(p + \tau_r p^2)\overline{t} - (1 + \tau_r p)\overline{w}, \\ \lambda_{ij}\overline{t}'_{,ij} &= t_0\beta_{ij}(p + \tau_r p^2)\overline{e}'_{ij} + c(p + \tau_r p^2)\overline{t}' - (1 + \tau_r p)\overline{w}'. \end{aligned} \qquad (4)$$

Умножив первое уравнение системы (4) на $\overline{t}'$, второе на $\overline{t}$, вычтем результаты и проинтегрируем по объему Ω. В результате получим

$$\lambda_{ij} \int\limits_{S} (\overline{t}_{,i}\overline{h}' - \overline{t}'_{,i}\overline{h})\, n_j dS - \beta_{ij}t_0(p + \tau_r p^2) \int\limits_{\Omega} (\overline{e}_{ij}\overline{t}' - \overline{e}'_{ij}\overline{t})\, dV +$$

$$+ (1 + \tau_r p) \int\limits_{\Omega} (\overline{w}\overline{t}' - \overline{w}'\overline{t})\, dV = 0 \qquad (5)$$

при краевых условиях

$$\overline{t}(x, \tau) = \overline{h}(x, \tau), \ \overline{t}'(x, \tau) = \overline{h}'(x, \tau), \ x \in S, \ \tau > 0.$$

Сравнивая уравнения (1) и (5) и применяя обратное преобразование Лапласа, получаем уравнение, выражающее обобщенную теорему взаимности анизотропных тел:

$$t_0 \int\limits_{S} dS \int\limits_{0}^{\tau} \left[p_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial u_i'(x, \tau_0)}{\partial\tau_0} - p_i'(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial u_i(x, \tau_0)}{\partial\tau_0} \right] d\tau_0 +$$

$$+ t_0\int\limits_\Omega dV\int\limits_0^\tau\left[X_i(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0\frac{\partial u_i'(x,\ \tau_0)}{\partial\tau_0}-X_i'(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0\frac{\partial u_i(x,\ \tau_0)}{\partial\tau_0}\right]d\tau_0=$$

$$=\int\limits_\Omega dV\int\limits_0^\tau[w(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0 t'(x,\ \tau_0)-w'(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0 t(x,\ \tau_0)]\,d\tau_0+$$

$$+\lambda_{ij}\int\limits_S dS\int\limits_0^\tau[h'(x,\ \tau-\tau_0)\, t_{,n}(x,\ \tau_0)-h(x,\ \tau-\tau_0)\, t'_{,n}(x,\ \tau_0)]\,d\tau_0. \qquad (6)$$

Теоремы Сомилиано и Грина. Используя обобщенную теорему взаимности, докажем теоремы Сомилиано и Грина для анизотропных тел, дающие возможность выражать перемещения u_i и температуру t внутри тела через распределения перемещений u_i, нагрузки p_i, температуры t и производной от температуры $t_{,n}$ на поверхности тела.

Определим перемещения u_i $(x,\ \tau)$, $x\in\Omega$, $\tau>0$. Для этого выберем силу $X_i'=\delta(x-\xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ij}$, приложенную в точке (ξ) по направлению оси x_j, которая действует на неограниченную среду, причем $w'=0$. Вызывающие этой силой перемещения и температуру обозначим через $u_i'=$ $=U_i^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau)$ и $t'=T^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau)$ и определим их из дифференциальных уравнений

$$c_{ijkl}U_{k,lj}^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau)+\delta(x-\xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ij}=\rho\ddot U_i^{(j)}+\beta_{ij}T_{,j}^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau), \qquad (7)$$

$$\lambda_{ij}T_{,ij}^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau)=t_0\beta_{ij}l\dot e'_{ij}+cl\dot T^{(j)} \qquad (8)$$

при однородных начальных условиях

$$U_i^{(j)}(x,\ \xi,\ 0)=0,\ \dot U_i^{(j)}(x,\ \xi,\ 0)=0,\ T^{(j)}(x,\ \xi,\ 0)=0,\ \dot T^{(j)}(x,\xi,\ 0)=0,$$
$$x\in\Omega,\ \tau=0, \qquad (9)$$

где $\dot e_{ij}'=\frac{1}{2}(\dot U_{i,j}^{(j)}+\dot U_{j,i}^{(j)})$, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, δ_{ij} — символ Кронекера.

Подставляя $X_i'=\delta(x-\xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ij}$, $w'=0$ и найденные из уравнений (7), (8) перемещения и температуру в уравнение взаимности (6), получаем

$$\dot u_j(\xi,\ \tau)+\tau_r\ddot u_j(\xi,\ \tau)=\int\limits_0^\tau d\tau_0\int\limits_\Omega X_i(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0\frac{\partial U_i^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau_0)}{\partial\tau_0}\,dV-$$

$$-\frac{1}{t_0}\int\limits_0^\tau d\tau_0\int\limits_\Omega w(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0 T^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau_0)\,dV+$$

$$+\int\limits_0^\tau d\tau_0\int\limits_S\left[p_i(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0\frac{\partial U_i^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau_0)}{\partial\tau_0}-u_i(x,\ \tau-\tau_0)\, l_0\frac{\partial p_i^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau_0)}{\partial\tau_0}\right]dS-$$

$$-\frac{\lambda_{ij}}{t_0}\int\limits_0^\tau d\tau\int\limits_S[t_{,n}(x,\ \tau_0)\, T^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau-\tau_0)-h(x,\ \tau_0)\, T_{,n}^{(j)}(x,\ \xi,\ \tau-\tau_0)]\,dS, \qquad (10)$$

где $p_i^{(j)}=\sigma_{ik}^{(j)}n_k$, $\sigma_{ik}^{(j)}$ — напряжения на поверхности S, вызванные силой X_i'.

Для определения температуры $t(x,\ \tau)$, $x\in\Omega$, $\tau>0$, выберем источник тепла в виде $w'=\delta(x-\xi)\,\delta(\tau)$, который действует в точке (ξ). Вызванные этим источником перемещения и температуру обозначим через $\tilde U_i(x,\ \xi,\ \tau)$ и $\tilde T(x,\ \xi,\ \tau)$, которые определим из уравнений

$$c_{ijkl}\tilde U_{k,lj}(x,\ \xi,\ \tau)=\rho\ddot{\tilde U}_i(x,\ \xi,\ \tau)+\beta_{ij}\tilde T_{,j}(x,\ \xi,\ \tau),\quad k,\ j,\ i=1,\ 2,\ 3, \qquad (11)$$

$$\lambda_{ij}\tilde T_{,ij}(x,\ \xi,\ \tau)=\beta_{ij}t_0 l\dot e_{ij}'+cl\dot{\tilde T}(x,\ \xi,\ \tau)-\delta(x-\xi)\,[\delta(\tau)+\tau_r\dot\delta(\tau)], \qquad (12)$$

при начальных условиях

$$\tilde{U}_i(x, \xi, 0) = 0, \dot{\tilde{u}}_i(x, \xi, 0) = 0, \tilde{T}(x, \xi, 0) = 0, \dot{\tilde{T}}(x, \xi, 0) = 0, x, \xi \in \Omega, \tau > 0, \quad (13)$$

где $\dot{\tilde{e}}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{U}}_{i,j} + \dot{\tilde{U}}_{j,i})$.

Подставляя $w' = \delta(x - \xi)\,\delta(\tau)$, $X_i' = 0$ и найденные из уравнений (11) и (12) перемещения и температуру в уравнение взаимности (6), находим

$$t(\xi, \tau) + \tau_r \dot{t}(\xi, \tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega w(x, \tau_0)\, l\tilde{T}(x, \xi, \tau - \tau_0)\, dV -$$

$$- t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega X_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial \tilde{U}_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dV -$$

$$- t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_S \left[p_i(x, \tau - \tau_0) l_0 \frac{\partial \tilde{U}_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} - u_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial p_i^{(w)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} \right] dS +$$

$$+ \lambda_{ij} \int_0^\tau d\tau_0 \int_S [t_{,n}(x, \tau - \tau_0)\, \tilde{T}(x, \xi, \tau_0) - h(x, \tau - \tau_0)\, \tilde{T}_{,n}(x, \xi, \tau_0)]\, dS, \quad (14)$$

где $p_i^{(w)} = \sigma_{ij}^{(w)} n_j$, $\sigma_{ij}^{(w)}$ — напряжение в точках $x \in S$, вызванные тепловым источником w'; $l_0 = 1 + \tau_r^{(0)} \frac{\partial}{\partial \tau_0}$. Формулы (10) и (14) являются обобщением формул Сомилиано на обобщенные взаимосвязанные динамические задачи термоупругости.

Если функции Грина относятся к ограниченной среде, то уравнения (10) и (14) упрощаются. Пусть $w' = 0$. Допустим, что в точке $\xi \in \Omega$ приложена сила $X_i' = \delta(x - \xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ij}$, вызывающая перемещения $U_i^{(j)}$ и температуру $T^{(j)}$. Эти величины удовлетворяют уравнениям (7), (8) с начальными условиями (9) и краевым условиям

$$U_i^{(j)}(x, \xi, \tau) = 0, \ T^{(j)}(x, \xi, \tau) = 0, \ \dot{T}^{(j)}(x, \xi, \tau) = 0, \ \xi \in \Omega, \ \tau > 0. \quad (15)$$

Аналогично при $X_i' = 0$ перемещения $\tilde{U}_i$ и температура $\tilde{T}$, возникающие от действия источника тепла $w' = \delta(x - \xi)\,\delta(\tau)$, удовлетворяют уравнениям (11), (12), начальным условиям (13) и краевым условиям

$$\tilde{U}_i(x, \xi, \tau) = 0, \ \tilde{T}(x, \xi, \tau) = 0, \ \dot{\tilde{T}}(x, \xi, \tau) = 0, \ x \in S, \ \xi \in \Omega, \ \tau > 0. \quad (16)$$

Считаем, что величины $U_i^{(j)}$, $T^{(j)}$, $\tilde{U}_i$ и $\tilde{T}$ определены. Тогда уравнения (10) и (14) запишутся так:

$$\dot{u}_j(\xi, \tau) + \tau_r \ddot{u}_j(\xi, \tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega X_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial U_i^{(j)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dV -$$

$$- \frac{1}{t_0} \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega w(x, \tau - \tau_0)\, l_0 T^{(j)}(x, \xi, \tau_0)\, dV -$$

$$- \int_0^\tau d\tau_0 \int_S u_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial p_i^{(j)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dS +$$

$$+ \frac{\lambda_{ij}}{t_0} \int_0^\tau d\tau_0 \int_S h(x, \tau_0)\, T_{,n}^{(j)}(x, \xi, \tau - \tau_0)\, dS, \quad (17)$$

$$t(\xi, \tau) + \tau_r \dot{t}(\xi, \tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega w(x, \tau_0)\, l\tilde{T}(x, \xi, \tau - \tau_0)\, dV -$$

$$- t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega X_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial \tilde{U}_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dV +$$

$$+ t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_S u_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial p_i^{(w)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dS -$$

$$- \lambda_{ij} \int_0^\tau d\tau_0 \int_S h(x, \tau - \tau_0)\, \tilde{T}_{,n}(x, \xi, \tau_0)\, dS. \tag{18}$$

Формулы (17), (18) дают возможность определить перемещения и температуру внутри тела, если на поверхности его заданы перемещения и температура, и являются обобщением теоремы Грина на обобщенные взаимосвязанные динамические задачи термоупругости анизотропных тел.

Метод Майзеля. Предположим, что тело Ω, ограниченное поверхностью S, подвергается действию массовых сил и источников тепла. Найдем перемещения и температуру внутри тел, если на части поверхности S_1 заданы перемещения u_i и нормальный градиент температуры h, а на части S_2 — поверхностные силы p_i и температура T_0, причем $S = S_1 + S_2$. Для решения этой задачи используем доказанную выше теорему взаимности.

Определим температуру t внутри тела. Для этого допустим, что в точке $\xi \in \Omega$ действует тепловой источник $w' = \delta(x - \xi)\, \delta(\tau)$, $X_i' = 0$. Возникающие при этом перемещения $\tilde{U}_i$ и температура T определяются из уравнений (11), (12) с краевыми условиями

$$\tilde{U}_i = 0,\ \tilde{T}_{,n} = 0 \text{ на } S_1,\ p_i' = 0,\ \tilde{T} = 0 \text{ на } S_2, \tag{19}$$

$$\tilde{U}_i(x, \xi, 0) = 0,\ \dot{\tilde{U}}_i(x, \xi, 0) = 0,\ \tilde{T}(x, \xi, 0) = 0,\ \dot{\tilde{T}}(x, \xi, 0) = 0. \tag{20}$$

Подставляя $w' = \delta(x - \xi)\, \delta(\tau)$, $X_i' = 0$ и найденные $\tilde{U}_i$ и $\tilde{T}$ в уравнение взаимности, приходим к уравнению

$$t(\xi, \tau) + \tau_r \dot{t}(\xi, \tau) = \int_\Omega dV \int_0^\tau w(x, \tau_0)\, l\tilde{T}(x, \xi, \tau - \tau_0)\, d\tau_0 - t_0 \int_\Omega dV \int_0^\tau X_i(x, \tau -$$

$$- \tau_0)\, l_0 \frac{\partial \tilde{U}_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \lambda_{ij} \int_{S_1} dS \int_0^\tau \tilde{T}(x, \xi, \tau - \tau_0)\, T_0(x, \tau_0)\, d\tau_0 -$$

$$- \lambda_{ij} \int_{S_2} dS \int_0^\tau T_0(x, \tau_0)\, \tilde{T}_{,n}(x, \xi, \tau - \tau_0)\, d\tau_0 -$$

$$- t_0 \int_{S_2} dS \int_0^\tau p_i(x, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial \tilde{U}_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 +$$

$$+ t_0 \int_{S_1} dS \int_0^\tau p_i'(x, \xi, \tau - \tau_0)\, l_0 \frac{\partial u_i(x, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0. \tag{21}$$

Определим теперь перемещения u_i. Пусть $w' = 0$ в точке $\xi \in \Omega$, а массовая сила $X_{ij} = \delta(x - \xi)\, \delta(\tau)\, \delta_{ij}$ и направлена по оси x_j. Возникающие при этом перемещения и температуру обозначим соответственно через $U_i^{(j)}$,

$T^{(j)}$ и определим из уравнений (7), (8) при краевых условиях

$$U_i^{(j)}=0,\ T_{,n}^{(j)}=0 \text{ на } S_1,\ p_i^{(j)}=\sigma_{ij}^{(j)}n_j=0,\ T^{(j)}=0 \text{ на } S_2,$$

$$U_i^{(j)}(x,\xi,0)=0,\ \dot{U}_i^{(j)}(x,\xi,0)=0,\ T^{(j)}(x,\xi,0)=0,\ \dot{T}^{(j)}(x,\xi,0)=0. \qquad (22)$$

Учитывая, что $X_i'=\delta(x-\xi)\,\delta(\tau)\,\delta_{ij}$, $w'=0$, и найденные величины $U_i^{(j)}$ и $T^{(j)}$, из уравнения взаимности приходим к уравнению

$$u_j(\xi,\tau)+\tau_r\ddot{u}_j(\xi,\tau)=\int_\Omega dV\int_0^\tau X_i(x,\tau-\tau_0)\,l_0\frac{\partial U_i^{(j)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\tau_0-$$

$$-\frac{1}{l_0}\int_\Omega dV\int_0^\tau w(x,\tau-\tau_0)\,l_0T^{(j)}(x,\xi,\tau_0)\,d\tau_0+$$

$$+\int_{S_2}dS\int_0^\tau p_i(x,\tau-\tau_0)\,l_0\frac{\partial U_i^{(j)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\tau_0-\int_{S_1}dS\int_0^\tau p_i^{(j)}(x,\tau-\tau_0)\times$$

$$\times l_0\frac{\partial u_i(x,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\tau_0+\lambda_{ij}\int_{S_2}dS\int_0^\tau T_0(x,\tau-\tau_0)\,T_{,n}^{(j)}(x,\xi,\tau_0)\,d\tau_0-$$

$$-\lambda_{ij}\int_{S_1}dS\int_0^\tau T^{(j)}(x,\xi,\tau-\tau_0)\,T_0'(x,\tau_0)\,d\tau_0,\qquad i,j=1,2,3, \qquad (23)$$

где $t_{,n}=T_0'$ на S_1, которое вместе с уравнением (21) представляет уравнение Майзеля для обобщенных динамических задач термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 8.IX 1974 г.

УДК 539.3

С. В. Грицай, Р. Н. Швец

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН ИЗГИБА НА ДВУХ КРУГОВЫХ ШАЙБАХ, ВПАЯННЫХ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ ПЛАСТИНКУ

Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим бесконечную тонкую трансверсально-изотропную пластинку с впаянными двумя жесткими круговыми шайбами радиуса R, центры которых размещены по оси x на расстоянии δ. В центре каждой шайбы поместим начало полярной системы координат r_k, θ_k ($k=1,2$). В рамках теории типа Тимошенко задача об установившихся колебаниях пластинки сводится к решению трех уравнений Гельмгольца [4, 5]

$$\Delta\tilde{w}_1+\alpha^2\tilde{w}_1=0;\quad \Delta\tilde{w}_2-\beta^2\tilde{w}_2=0; \qquad (1)$$
$$\Delta\Phi-\gamma^2\Phi=0,$$

где

$$\alpha^2,\ \beta^2=\frac{\omega_1}{2}\sqrt{\omega_1^2(1+c_0^2)^2+4c_0^2\left(\frac{1}{\varepsilon}-\omega_1^2\right)}\pm\frac{\omega_1^2}{2}(1+c_0^2);$$