

Можно показать, что точность формулы (8) не меньше точности аппроксимации функции $L(\eta)$. Поэтому формула (8) является практически точной. Если сравнить значения k_2 , подсчитанные по формуле (8) и соответствующей формуле работы [2] для больших δ , то при $\delta = 2$ погрешность этих значений не превышает 0,4%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Кит Г. С., Лысый И. П. Плоская и осесимметричная задачи термоупругости для слоя с трещиной.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
3. Кит Г. С., Лысый И. П. Стационарное температурное поле в полосе и слое при смешанных граничных условиях.— ИФЖ, 1972, 22, 1.
4. Лысый И. П. Термоупругое состояние полосы с двумя продольными трещинами, обусловленное возмущением температурного поля.— ФХММ, 1974, 6.
5. Прикладные вопросы вязкости разрушения. «Мир», М., 1968.
6. Сметанин Б. И. Две щели в полосе конечной толщины.— ПММ, 1970, 34, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ПЛАСТИНКА СО СТЕРЖНЕВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ ИСТОЧНИК ТЕПЛА

Ю. М. Коляно, И. Н. Махоркин

Рассмотрим свободную от внешней нагрузки пластинку со стержневым включением радиуса R , в котором с начального момента времени начинает действовать источник тепла постоянной мощности q . Толщина системы равна 2δ . Начальная ее температура и температура пластинки на бесконечности равны нулю. Все величины, относящиеся к включению, будем обозначать индексом «0». В работе [2] приводится условие теплообмена на поверхности $r = R$ тела

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{H_1}{R} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{q}{\lambda_0} S_+(\tau), \quad (1)$$

характеризующееся теплопроводностью λ_0 и температуропроводностью a_0 включения. Здесь $H_1 = 2 \frac{\lambda}{\lambda_0}$, $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция, λ — теплопроводность тела, r — полярный радиус; ось z направлена вдоль оси включения.

Предположим, что теплообмен через боковые поверхности системы с внешней средой нулевой температуры осуществляется по закону Ньютона. Интегрируя (1) в соответствии с формулой $T = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t dz$ с учетом условий Ньютона и линейного изменения температуры по толщине в случае симметричной относительно срединной плоскости $z = 0$ системы задачи, получаем условие теплообмена на поверхности $\rho = 1$ тонкой пластинки:

$$H \frac{\partial T}{\partial \rho} - B_0 T = \frac{\partial T}{\partial F} - \frac{Q}{2} H S_+(F), \quad (2)$$

где $\rho = \frac{r}{R}$, $B_0 = \frac{\alpha_0 R^2 a_0}{\lambda_0 \delta a}$, $Q = \frac{R^2}{\lambda} q$, α_0 — коэффициент теплоотдачи с поверхностей $z = \pm \delta$ включения, $H = 2 \frac{c}{c_0}$, $F = \frac{a\tau}{R^2}$, $c = \frac{a}{\lambda}$.

Уравнение теплопроводности для тонкой пластинки имеет вид [1]

$$\Delta T - BT = \frac{\partial T}{\partial F}, \quad (3)$$

где $B = \frac{\alpha R^2}{\lambda \delta}$, α — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей пластинки, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Используя преобразование Лапласа по F , находим такое изображение функции температуры:

$$\bar{T} = \frac{QH}{2s} \frac{K_0(\rho\gamma)}{(\gamma^2 + b) K_0(\gamma) + H\gamma K_1(\gamma)}, \quad (4)$$

где $K_\nu(\zeta)$ — функция Макдональда порядка $\nu = 0; 1$, $\gamma = \sqrt{B + s}$, s — параметр преобразования Лапласа, $b = B_0 - B$. Переходя в (4) к оригиналу, получаем искомое температурное поле в пластинке:

$$T = \frac{QH}{2} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta^2 e^{-(\eta^2 + B)F} + B}{\eta^2 + B} \frac{\Phi_0(\rho, \eta)}{\eta \Psi(\eta)} d\eta \right\}, \quad (5)$$

где $\Psi(\eta) = P_J^2 + P_Y^2$, $\Phi_\nu(\rho, \eta) = J_\nu(\eta\rho) P_Y - Y_\nu(\eta\rho) P_J$, $P_J = (b - \eta^2) \times \times J_0(\eta) + \eta H J_1(\eta)$, $P_Y = (b - \eta^2) Y_0(\eta) + \eta H Y_1(\eta)$, $J_\nu(\zeta)$, $Y_\nu(\zeta)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка $\nu = 0; 1$.

Обусловленные температурным полем (5) напряжения в пластинке определим по формулам [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \nu \frac{u}{\rho} - \alpha_t (1 + \nu) T \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{u}{\rho} + \nu \frac{\partial u}{\partial \rho} - \alpha_t (1 + \nu) T \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где отнесенное к радиусу включения радиальное перемещение u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u - \frac{u}{\rho^2} = \alpha_t (1 + \nu) \frac{\partial T}{\partial \rho}. \quad (7)$$

Граничное термоупругое условие на поверхности $\rho = 1$ пластинки имеет вид [1]

$$\sigma_{rr} = \frac{E_0}{1 - \nu_0} [u - \alpha_t^{(0)} T]. \quad (8)$$

Здесь α_t , $\alpha_t^{(0)}$ — температурные коэффициенты линейного расширения пластинки и включения; ν , ν_0 — их коэффициенты Пуассона; E , E_0 — их модули упругости.

Решение уравнения (7) при условиях данной задачи имеет вид

$$u = \frac{\alpha_t^{(0)} T^*}{1 - m} \rho + (1 + \nu) \alpha_t \rho I(\rho, F), \quad (9)$$

где $m = \frac{E(1 - \nu)}{E_0(1 - \nu_0)}$, $T^* = T|_{\rho=1}$,

$$\begin{aligned} I(\rho, F) &= \frac{1}{\rho^2} \int_1^\rho \zeta T(\zeta, F) d\zeta = \frac{Q}{2} H \left\{ \frac{1 - \rho^{-2}}{2b} - \right. \\ &\left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta^2 e^{-(\eta^2 + B)F} + B}{\eta^2 + B} \left[\Phi_1(\rho, \eta) + \frac{2}{\pi \rho} (b - \eta^2) \right] \frac{d\eta}{\rho \eta^2 \Psi(\eta)} \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (9) в (6), получаем такие выражения температурных напряжений в пластинке:

$$\sigma_{rr} = E \left[\frac{\alpha_t^{(0)} T^*}{(1-m)(1-\nu)} - \alpha_t I(\rho, F) \right], \quad (10)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = E \left[\frac{\alpha_t^{(0)} T^*}{(1-m)(1-\nu)} + \alpha_t I(\rho, F) - \alpha_t T \right].$$

На краю пластинки $\rho = 1$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{rr}}{\alpha_t E Q} = \frac{n\theta}{(1-m)(1-\nu)}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r - \theta,$$

где $\theta = \frac{T}{Q}$, $n = \frac{\alpha_t^{(0)}}{\alpha_t}$. При малых значениях времени и $B_0 = 0$ функция θ в напряжениях (11) имеет вид

$$\theta = \frac{QH}{2} \left\{ \frac{e^{-s_2 F} - e^{-s_1 F}}{s_1 - s_2} - \frac{H}{s_1 - s_2} \left[\frac{\sqrt{B}}{s_1} \operatorname{erf} \sqrt{BF} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{s_1} \sqrt{B - s_1} e^{-s_1 F} \operatorname{erf} \sqrt{F(B - s_1)} + \frac{\sqrt{B}}{s_2} \operatorname{erf} \sqrt{BF} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{s_2} \sqrt{B - s_2} e^{-s_2 F} \operatorname{erf} \sqrt{F(B - s_2)} \right] \right\},$$

где $s_{1,2} = \frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} H^2 + HB}$, $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятности. При стационарном тепловом режиме в формулах (11) для θ будет выражение

$$\theta = \frac{K_0(\sqrt{B})}{2K_1(\sqrt{B})\sqrt{B}},$$

где $K_\nu(\xi)$ — функция Макдональда.

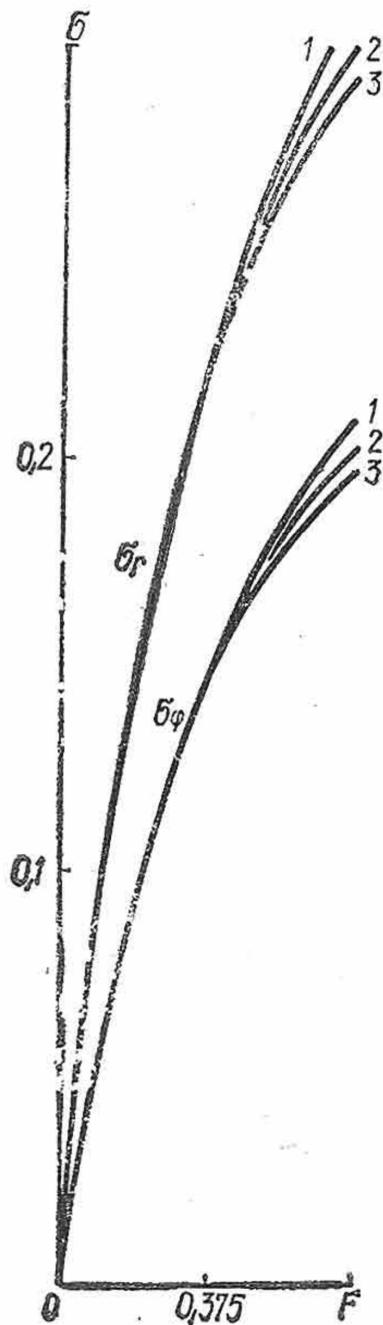


Рис. 1

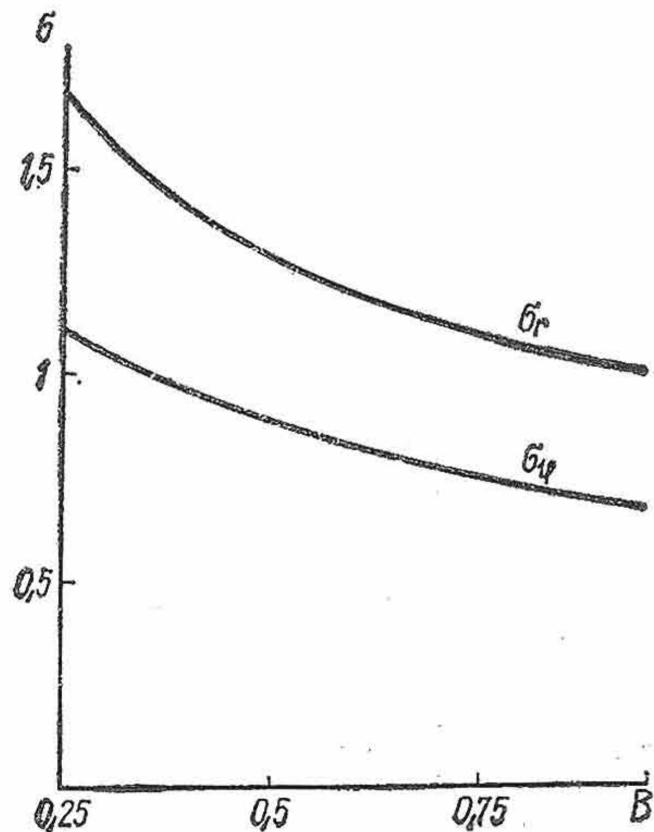


Рис. 2

По формулам (11) — (13) произведены численные расчеты радиальных и кольцевых температурных напряжений в зависимости от малых значений критерия F при значениях критерия $B = 0,25; 0,75; 1$ (рис. 1) и в зависимости от критерия B при стационарном тепловом режиме (рис. 2). При этом приняты такие значения физико-механических характеристик: $H = 0,71$, $\frac{E_0}{E} =$

$= 3, B_0 = 0, n = 1,71, \nu = 0,2, \nu_0 = 0,3$. На рис. 1 кривые 1—3 соответствуют значениям критерия $B = 0,25; 0,75; 1$. Из графиков видно, что с ростом теплоотдачи с боковых поверхностей пластинки напряжения уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
2. Jaeger I. C. Conduction of heat in a solid in contact with a thin layer of a good conductor.— Quart. J. Mech. appl. Math., 1955, 8, 1.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В. А. Волос

Рассмотрим изотропную однородную пластину толщины 2δ (рисунок). Для определения температурного поля $t(x, y, z, \tau)$ в данной пластинке имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + p^2 t = 0, \quad p^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (1)$$

граничные условия

$$\beta^\pm \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \mp q^\pm \right) \pm \alpha^\pm (t - t_c^\pm) = 0 \quad \text{при } z = \pm \delta, \quad (2)$$

$$\beta_s \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial n} - q_s \right) + \alpha_s (t - t_c^s) = 0 \quad \text{на } S \quad (3)$$

и начальное условие

$$t(x, y, z, \tau) = t_0(x, y, z) \quad \text{при } \tau = 0. \quad (4)$$

Здесь λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, β^\pm — безразмерные коэффициенты; α^\pm, α_s — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm \delta$ и S пластинки; t_c^\pm, t_c^s — температуры сред, омывающих эти поверхности, τ — время.

Известно [1], что температура пластинки через ее интегральные характеристики выражается так:

$$t = \frac{p\delta \cos pz}{\sin p\delta} T + \frac{1}{3} \frac{p^2 \delta^2 \sin pz}{\sin p\delta - p\delta \cos p\delta} T^*, \quad (5)$$

где

$$T = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t dz, \quad T^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} z t dz. \quad (6)$$

Подставляя формулу (5) в (2), после некоторых преобразований для определения интегральных характеристик T и T^* получаем следующую систему дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка:

$$\begin{aligned} & (\beta^+ + \beta^-) (p\delta)^2 T - p\delta (\alpha^+ + \alpha^-) \frac{\delta}{\lambda} \operatorname{ctg} p\delta T - \frac{1}{3} \frac{(p\delta)^2}{1 - p\delta \operatorname{ctg} p\delta} \left[(\beta^+ - \right. \\ & \left. - \beta^-) p\delta \operatorname{ctg} p\delta + (\alpha^+ - \alpha^-) \frac{\delta}{\lambda} \right] T^* = - (\beta^- q^- + \beta^+ q^+) \frac{\delta}{\lambda} - \end{aligned}$$

