ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛОСЕ С ДВУМЯ ПРОДОЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

И. П. Лысый

Рассмотрим свободную от внешних усилий бесконечную полосу ширины $2d$, в которой имеются две продольные трещины равной длины $2l = b - a$, расположенные симметрично относительно граней полосы и начала координат. Будем считать, что на гранях полосы заданы стационарные температурные условия первого, второго или третьего рода, а берега трещины теплоизолированы. Тогда температурное поле в полосе с трещиной можно представить в виде суммы основного (имеющего место в сплошной полосе) и возмущенного (обусловленного наличием трещин). Задача определения возмущенного температурного поля рассматривалась в работе [4].

Следует заметить, что основное температурное поле вызывает в свободной от внешних усилий сплошной полосе нормальные σ_{yy}^0 и касательные σ_{xy}^0 напряжения. Для освобождения берегов трещин от нормальных усилий можно воспользоваться методом, изложенным в работе [6].

Здесь остановимся на определении коэффициентов интенсивности напряжений, обусловленных возмущением заданного температурного поля и касательными усилиями σ_{xy}^0. Эти коэффициенты легко найти, если известны производные по x от смещения берегов трещин [5]. В частности, в рассматриваемом нами случае $k_1 = 0$, а коэффициент k_2 в точке $x = c$ правой трещины ($c = a$ или $c = b$) определяется по формуле

$$k_2^{(c)} = (-1)^{\frac{c-a}{b-a}} \frac{E}{\sqrt{2}\,(1-\chi^2)} \lim_{x\to c} \sqrt{(-1)^{\frac{c-a}{b-a}} (x-c)}\, \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}, \qquad (1)$$

где $\chi = \nu$ в случае плоской деформации и $\chi = 0$ в случае плоского напряженного состояния, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $u(x)$ — смещение верхнего берега трещины в направлении оси Ox.

С помощью интегрального преобразования Фурье задача об определении производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ приводится к решению интегрального уравнения [4]

$$\left(\int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b}\right) \varphi(\xi)\, K\left(\frac{\xi - x}{d}\right) d\xi = -B\sigma_{xy}^0(x), \qquad (2)$$

где

$$\varphi(x) = u'(x) - Dt(x),\quad D = \alpha_t(1+\chi),\quad B = \frac{2\pi(1-\chi^2)\,\delta}{E}, \qquad (3)$$

$$K(w) = \int_0^\infty L(\eta)\sin(\eta w)\, d\eta,\quad L(\eta) = 2\,\frac{\operatorname{sh}^2\eta - \eta^2}{\operatorname{sh}2\eta - 2\eta}, \qquad (4)$$

α_t — коэффициент линейного теплового расширения.

В работе [4] рассмотрено решение указанной задачи при $d > 1$. Здесь мы найдем приближенное решение уравнения (2), пригодное для произвольных d. С этой целью аппроксимируем функцию $L(\eta)$ выражением $L(\eta) = \operatorname{th}\frac{\eta}{2}$. Эта аппроксимация верно отражает поведение функции $L(\eta)$ вида (4) в нуле и на бесконечности. Максимальная относительная ошибка такой аппроксимации не превосходит 3,4% для всех $0 \leqslant \eta < \infty$.

Подставляя в (2) аппроксимированное выражение $L(\eta)$, получаем

$$\left(\int_{-\beta}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta}\right) \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau - \zeta)} = -f(\zeta). \qquad (5)$$

Здесь $\tau = \text{th}\,\frac{\pi}{d}\,\xi$, $\zeta = \text{th}\,\frac{\pi}{d}\,x$, $\alpha = \text{th}\,\frac{\pi a}{d}$, $\beta = \text{th}\,\frac{\pi b}{d}$, $f(\zeta) = B\sigma_{xy}^{0}\left(\frac{d}{\pi}\,\text{arcth}\,\zeta\right)/\sqrt{1-\zeta^2}$.

Применяя к уравнению (5) формулу обращения интеграла типа Коши [1], находим

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{(\beta^2-\zeta^2)(\zeta^2-\alpha^2)}}\left[\frac{1}{\pi^2}\left(\int\limits_{-\beta}^{-\alpha} + \int\limits_{\alpha}^{\beta}\right)\frac{\sqrt{(\beta^2-\tau^2)(\tau^2-\alpha^2)}}{\tau-\zeta}\,\times\right.$$

$$\left.\times f(\tau)\,d\tau + C_2\tau + C_1\right]$$

или, переходя к старым переменным,

$$u'(x) = Dt(x) + \frac{\text{ch}\,x_0}{X(x)}\left[\psi(x) + A(C_2\,\text{th}\,x_0 + C_1)\right],\quad A = \text{ch}\,a_0\,\text{ch}\,b_0, \tag{6}$$

где

$$\psi(x) = -\frac{B}{\pi d}\left(\int\limits_{-b}^{-a} + \int\limits_{a}^{b}\right)\frac{X(\xi)\,\sigma_{xy}^{0}(\xi)\,d\xi}{\text{ch}^3\xi_0\,(\text{th}\,\xi_0 - \text{th}\,x_0)},$$

$X(x) = \sqrt{(\text{ch}^2 b_0 - \text{ch}^2 x_0)(\text{ch}^2 x_0 - \text{ch}\,a_0)}$, C_1 и C_2 — постоянные, подлежащие определению. В приведенных выше выражениях величина с индексом «0» означает произведение $\frac{\pi}{d}$ на эту величину, например $x_0 = \frac{\pi}{d}x$.

Интегрируя равенство (6) и удовлетворяя граничным условиям $u(\pm a) = u(\pm b) = 0$, находим

$$C_1 = \frac{D(I_1^- - I_1^+) - I_2^+ + I_2^-}{2AI_4},\quad C_2 = -\frac{D(I_1^+ + I_1^-) + I_2^+ + I_2^-}{2AI_3},$$

где

$$I_1^\pm = \int\limits_{\pm a}^{\pm b} t(x)\,dx,\quad I_2^\pm = \int\limits_{\pm a}^{\pm b}\frac{\text{ch}\,x_0\psi(x)}{X(x)}\,dx,\quad I_3 = \int\limits_{a}^{b}\frac{\text{sh}\,x_0}{X(x)}\,dx,\quad I_4 = \int\limits_{a}^{b}\frac{\text{ch}\,x_0}{X(x)}\,dx.$$

Зная функцию $u'(x)$, по формуле (1) легко определяем величину $k_2^{(c)}$.

В частности, устремляя перемычку между трещинами к нулю ($a \to 0$), получаем соответствующие формулы для одной трещины длины $2b$. Тогда

$$u'(x) = Dt(x) + \frac{1}{R(x)}\left\{\frac{I(x)}{\pi d} - \frac{\text{ch}\,b_0}{2dK(\text{th}\,b_0)}\int\limits_{a}^{b}\left[\pi Dt(x) + \frac{I(x)}{dR(x)}\right]dx\right\}, \tag{7}$$

где

$$R(x) = \sqrt{\text{ch}^2 b_0 - \text{ch}^2 x_0},\quad I(x) = B\int\limits_{-b}^{b}\frac{R(\xi)\,\sigma_{xy}^{0}(\xi)\,d\xi}{\text{ch}^2\xi_0\,(\text{th}\,\xi_0 - \text{th}\,x_0)},$$

$K(\text{th}\,b_0)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть на верхней и нижней гранях полосы с одной трещиной задана соответственно температура $\pm T_0$. Тогда основное температурное поле $t_0(x, y) = \frac{T_0}{d}y$ не вызывает в сплошной полосе напряжений и коэффициент интенсивности напряжений будет обусловлен только возмущенным температурным полем. Полагая в (7) $\sigma_{xy}^{0} = 0$ и учитывая выражение для $t(x)$, приведенное в работе [3], после перехода к безразмерным координатам, получаем

$$k_2^{(\pm 1)} = \pm\frac{E\alpha_t T_0}{2(1-\chi)}\sqrt{\frac{l\,\text{cth}\,\frac{\pi}{d}}{\pi\delta}}\left[K\left(\text{th}\,\frac{\pi}{\delta}\right)\right]^{-1}\int\limits_{-1}^{1}\arccos\frac{\text{ch}\,\frac{\pi x}{2\delta}}{\text{ch}\,\frac{\pi}{2\delta}}\,dx. \tag{8}$$

Здесь $\sigma = \frac{d}{b}$ — безразмерная полуширина полосы.

Можно показать, что точность формулы (8) не меньше точности аппроксимации функции $L(\eta)$. Поэтому формула (8) является практически точной. Если сравнить значения k_2, подсчитанные по формуле (8) и соответствующей формуле работы [2] для больших δ, то при $\delta = 2$ погрешность этих значений не превышает 0,4%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Кит Г. С., Лысый И. П. Плоская и осесимметричная задачи термоупругости для слоя с трещиной.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
3. Кит Г. С., Лысый И. П. Стационарное температурное поле в полосе и слое при смешанных граничных условиях.— ИФЖ, 1972, **22**, 1.
4. Лысый И. П. Термоупругое состояние полосы с двумя продольными трещинами, обусловленное возмущением температурного поля.— ФХММ, 1974, 6.
5. Прикладные вопросы вязкости разрушения. «Мир», М., 1968.
6. Сметанин Б. И. Две щели в полосе конечной толщины.— ПММ, 1970, 34, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ПЛАСТИНКА СО СТЕРЖНЕВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ ИСТОЧНИК ТЕПЛА

Ю. М. Коляно, И. Н. Махоркин

Рассмотрим свободную от внешней нагрузки пластинку со стержневым включением радиуса R, в котором с начального момента времени начинает действовать источник тепла постоянной мощности q. Толщина системы равна 2δ. Начальная ее температура и температура пластинки на бесконечности равны нулю. Все величины, относящиеся к включению, будем обозначать индексом «0». В работе [2] приводится условие теплообмена на поверхности $r = R$ тела

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{H_1}{R}\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a_0}\frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{q}{\lambda_0} S_+(\tau), \tag{1}$$

характеризующееся теплопроводностью λ_0 и температуропроводностью a_0 включения. Здесь $H_1 = 2\frac{\lambda}{\lambda_0}$, $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция, λ — теплопроводность тела, r — полярный радиус; ось z направлена вдоль оси включения.

Предположим, что теплообмен через боковые поверхности системы с внешней средой нулевой температуры осуществляется по закону Ньютона. Интегрируя (1) в соответствии с формулой $T = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} tdz$ с учетом условий Ньютона и линейного изменения температуры по толщине в случае симметричной относительно срединной плоскости $z = 0$ системы задачи, получаем условие теплообмена на поверхности $\rho = 1$ тонкой пластинки:

$$H\frac{\partial T}{\partial \rho} - B_0 T = \frac{\partial T}{\partial F} - \frac{Q}{2} HS_+(F), \tag{2}$$

где $\rho = \frac{r}{R}$, $B_0 = \frac{\alpha_0 R^2 a_0}{\lambda_0 \delta a}$, $Q = \frac{R^2}{\lambda} q$, α_0 — коэффициент теплоотдачи с поверхностей $z = \pm\delta$ включения, $H = 2\frac{c}{c_0}$, $F = \frac{a\tau}{R^2}$, $c = \frac{a}{\lambda}$.

Уравнение теплопроводности для тонкой пластинки имеет вид [1]

$$\Delta T - BT = \frac{\partial T}{\partial F}, \tag{3}$$