

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Л. П. Беседина

Рассмотрим задачу об определении таких осесимметричных остаточных деформаций, которые приводят к оптимально низкому уровню остаточных напряжений в свободных на краях оболочках вращения. Задачи об определении напряженного состояния тонких оболочек, вызванного наличием остаточных деформаций, рассматривались в работах [3—5].

При заданном распределении осесимметричных остаточных деформаций  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0$  и отсутствии внешних силовых воздействий определение напряженно-деформированного состояния оболочек вращения сводится к нахождению разрешающих функций  $V$  и  $\theta$ , которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \dot{V} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{V} - \left( \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) V + q k_2 \theta - q \left[ \frac{\dot{r}}{r} (\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0) + \dot{\varepsilon}_2^0 \right] = 0, \\ F_2 &\equiv \ddot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \left( \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \nu k_1 k_2 \right) \theta - k_2 V + \dot{\kappa}_1^0 + \nu \dot{\kappa}_2^0 - \\ &\quad - (1 - \nu) \frac{\dot{r}}{r} (\kappa_2^0 - \kappa_1^0) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $q = 3(1 - \nu^2)/h^2$ ,  $r = r(s)$  — радиус поперечного сечения;  $k_1, k_2$  — кривизны меридианов и параллелей;  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $2h$  — толщина оболочки,  $s$  — длина дуги меридиана, отсчитываемая от фиксированного сечения; точка над величиной употребляется для обозначения производной по дуге  $s$ . При определении функций  $V$  и  $\theta$  к системе уравнений (1) необходимо присоединить соответствующие условия на свободных краях оболочки.

Если функции  $V(s)$  и  $\theta(s)$  найдены, то отличные от нуля усилия  $N_1, N_2$ , изгибающие моменты  $M_1, M_2$  и компоненты деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$  срединной поверхности оболочки определяются по формулам

$$\begin{aligned} N_1 &= -D_1 \frac{\dot{r}}{r} V, \quad M_1 = -D_1 \left( \dot{\theta} + \nu \frac{\dot{r}}{r} \theta + \dot{\kappa}_1^0 + \nu \dot{\kappa}_2^0 \right), \\ N_2 &= -D_1 \dot{V}, \quad M_2 = -D_1 \left( \frac{\dot{r}}{r} \theta + \nu \dot{\theta} + \dot{\kappa}_2^0 + \nu \dot{\kappa}_1^0 \right), \\ \varepsilon_1 &= -\frac{1}{q} \left( \frac{\dot{r}}{r} V - \nu \dot{V} \right) + \varepsilon_1^0, \quad \kappa_1 = -\dot{\theta} + \dot{\kappa}_1^0, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1}{q} \left( \dot{V} - \nu \frac{\dot{r}}{r} V \right) + \varepsilon_2^0, \quad \kappa_2 = -\frac{\dot{r}}{r} \theta + \dot{\kappa}_2^0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D_1 = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2}$  — изгибная жесткость,  $E$  — модуль упругости.

Задачу об определении оптимальных осесимметричных остаточных деформаций  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0$ , вызывающих сравнительно низкий уровень остаточных напряжений, решаем вариационными методами [2]. Для этого введем в рассмотрение функционал упругой энергии оболочки [1]

$$K = \iint_{(S)} [N_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0) + N_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_2^0) + M_1 (\kappa_1 - \kappa_1^0) + M_2 (\kappa_2 - \kappa_2^0)] dS. \quad (3)$$

Здесь  $S$  — срединная поверхность оболочки,  $\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0, \varepsilon_2 - \varepsilon_2^0, \kappa_1 - \kappa_1^0, \kappa_2 - \kappa_2^0$  — компоненты упругой деформации оболочки. Подставляя выражения

(2) в функционал (3), получаем

$$K[\theta, V, \kappa_1^0, \kappa_2^0] = \pi D_1 \int_{s_0}^{s_1} \left[ \frac{1}{q} \left( r\dot{V}^2 - 2vr\dot{V}V + \frac{\dot{r}^2}{r} V^2 \right) + r\dot{\theta}^2 + 2vr\dot{\theta}\theta + \right. \\ \left. + \frac{\dot{r}^2}{r} \theta^2 + 2r\dot{\theta}(\kappa_1^0 + v\kappa_2^0) + 2r\dot{\theta}(\kappa_2^0 + v\kappa_1^0) + r(\kappa_1^{0^2} + 2v\kappa_1^0\kappa_2^0 + \kappa_2^{0^2}) \right] ds. \quad (4)$$

Сформулируем вариационную задачу. Найти экстремум функционала  $K$  на множестве функций  $\theta, V, \kappa_1^0, \kappa_2^0$ , которые удовлетворяют разрешающим уравнениям (1) и условиям свободных краев. Такая задача сводится к нахождению экстремума функционала

$$K^*[\theta, V, \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0] = \pi D_1 \int_{s_0}^{s_1} \left\{ \frac{1}{q} \left( r\dot{V}^2 - 2vr\dot{V}V + \frac{\dot{r}^2}{r} V^2 \right) + \right. \\ \left. + r\dot{\theta}^2 + 2vr\dot{\theta}\theta + \frac{\dot{r}^2}{r} \theta^2 + 2r\dot{\theta}(\kappa_1^0 + v\kappa_2^0) + 2r\dot{\theta}(\kappa_2^0 + v\kappa_1^0) + \right. \\ \left. + r(\kappa_1^{0^2} + 2v\kappa_1^0\kappa_2^0 + \kappa_2^{0^2}) + 2\lambda_1(s)r \left[ \ddot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \left( \frac{\dot{r}^2}{r^2} + vk_1k_2 \right) \theta - \right. \right. \\ \left. - k_2V + \dot{\kappa}_1^0 + v\dot{\kappa}_2^0 - (1-v) \frac{\dot{r}}{r} (\kappa_2^0 - \kappa_1^0) \right] + 2\lambda_2(s)r \left[ \dot{V} + \frac{\dot{r}}{r} V - \right. \\ \left. - \left( \frac{\dot{r}^2}{r^2} - vk_1k_2 \right) V + qk_2\theta - q \left( \frac{\dot{r}}{r} (\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0) + \dot{\varepsilon}_2^0 \right) \right] \Big\} ds. \quad (5)$$

Приравнявая нулю первую вариацию функционала  $K^*$ , получаем систему уравнений Эйлера, которая с учетом разрешающих уравнений (1) приводится к виду

$$\kappa_2^0 + \frac{\dot{r}}{r^2 k_2} [r(\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0) + r\dot{\varepsilon}_2^0] = 0, \quad (6) \\ \kappa_1^0 + \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{rk_1} (r(\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0) + r\dot{\varepsilon}_2^0) \right] = 0.$$

Сравнивая полученные уравнения (6) с уравнениями совместности деформаций, приходим к выводу, что система уравнений (6) представляет собой уравнения совместности осесимметричных остаточных деформаций  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0$  срединной поверхности оболочки вращения. Применим полученные результаты для определения дополнительных остаточных деформаций в цилиндрической оболочке, которые вместе с начальными вызывают оптимально низкий уровень остаточных напряжений.

Для цилиндрической оболочки ( $r = R = \text{const}, k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{R}, s = zR$ ) уравнения (6), которым должны удовлетворять оптимальные осесимметричные остаточные деформации, записываются в виде

$$\kappa_2^0 = 0, \quad \kappa_1^0 + \frac{1}{R} \frac{d^2 \varepsilon_2^0}{dz^2} = 0. \quad (7)$$

Пусть в области  $-a \leq z \leq a$  бесконечной цилиндрической оболочки имеются начальные остаточные деформации

$$\kappa_1 = -\frac{b}{R} A (z^2 - a^2) (5z^2 - a^2) [S_+(z+a) - S_+(z-a)], \\ \kappa_2^* = 0, \quad \varepsilon_2^* = 0, \quad (8)$$

где  $S_+(z)$  — единичная функция скачка,  $A$  — заданная константа. Остаточные деформации, дополняющие начальные до оптимальных, обозначим через  $\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\kappa}_2$  и  $\tilde{\kappa}_1$ , так что

$$\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^* + \tilde{\varepsilon}_2, \quad \kappa_2^0 = \kappa_2^* + \tilde{\kappa}_2, \quad \kappa_1^0 = \kappa_1^* + \tilde{\kappa}_1. \quad (9)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда  $\tilde{\kappa}_1 = 0$ . Тогда согласно системе уравнений (7), (8) получим следующее оптимальное локальное (в области  $-a \leq z \leq a$ ) распределение остаточных деформаций:

$$\begin{aligned} \kappa_1^0 &= \kappa_1^* = -\frac{6}{R} A (z^2 - a^2) (5z^2 - a^2) |S_+(z+a) - S_+(z-a)|, \\ \varepsilon_2^0 &= \tilde{\varepsilon}_2 = A (z^2 - a^2)^3 |S_+(z+a) - S_+(z-a)|, \\ \kappa_2^0 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть в области  $-a \leq z \leq a$  цилиндрической оболочки заданы начальные остаточные деформации

$$\kappa_1^* = -\frac{B}{R} (z^2 - a^2)^2 |S_+(z+a) - S_+(z-a)|, \quad \varepsilon_2^* = 0, \quad \kappa_2^* = 0, \quad (11)$$

где  $B$  — заданная константа. При  $\tilde{\kappa}_1 = 0$  из уравнений (7) получаем следующий оптимальный закон распределения остаточных деформаций:

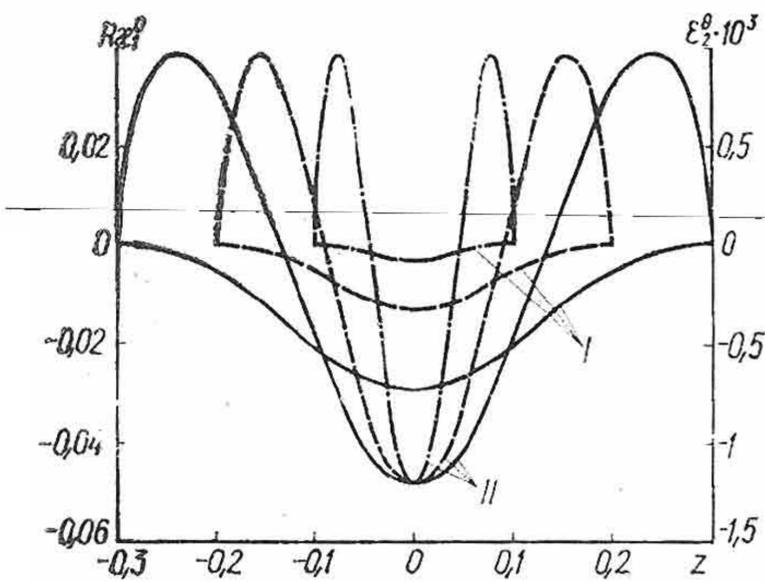
$$\begin{aligned} \varepsilon_2^0 &= \tilde{\varepsilon}_2 = B \{|zf_1(z) - f_2(z) + f_2(a)| |S_+(z+a) - S_+(z-a)| + \\ &+ zf_1(a) |S_+(z+a) + S_+(z-a)|\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\kappa_1^0 = \kappa_1^* = -\frac{B}{R} (z^2 - a^2)^2 |S_+(z+a) - S_+(z-a)|,$$

$$\kappa_2^0 = 0,$$

где

$$f_1(z) = \frac{z^5}{5} - 2a^2 \frac{z^3}{3} + a^4 z, \quad f_2(z) = \frac{z^6}{6} - a^2 \frac{z^4}{2} + a^4 \frac{z^2}{2}. \quad (13)$$



Отметим, что определенные формулами (12) остаточные деформации не являются локальными.

На рисунке представлены графики распределения вдоль осевой координаты  $z$  оптимальных локальных остаточных деформаций  $\varepsilon_2^0$  (кривые I) и  $\kappa_1^0$  (кривые II), найденных по формулам (10), для  $A = 1$ ,  $a = 0,3$  сплошными линиями, для  $A = 5,0625$ ,  $a = 0,2$  пунктирными и для  $A = 81$ ,  $a = 0,1$  штрихпунктирными линиями. Из графиков видно, что при одной и той же

максимальной величине остаточной деформации  $\kappa_1^0$  с расширением области ее распределения максимальное значение необходимых для снятия остаточных напряжений остаточных деформаций  $\varepsilon_2^0$ , локализованных в той же области, увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Григолюк Э. И., Подстригач Я. С. О применении методов вариационного исчисления к решению задач об оптимальном нагреве тонких оболочек. — Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
3. Осадчук В. А. К определению остаточных напряжений в сферической оболочке. — ФХММ, 1971, 7, 4.
4. Подстригач Я. С., Осадчук В. А. К определению напряженного состояния тонких оболочек с учетом деформаций, обусловленных физико-химическими процессами. — ФХММ, 1968, 4, 2.

б. Подстригач Я. С., Осадчук В. А. Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек, обусловленного заданным тензором несовместных деформаций, и его приложения к определению сварочных напряжений.— ФХММ, 1968, 4, 4.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
в декабре 1974 г.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ ПРИ АНТИСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

М. М. Николишин

Задача о напряженном состоянии замкнутой бесконечной цилиндрической оболочки с трещиной, расположенной вдоль отрезка образующей  $\beta = 0$ ,  $|\alpha| \leq \alpha_0$ , рассматривалась в работе [3]. При этом предполагалось, что напряженно-деформированное состояние оболочки без трещины симметрично относительно координатных линий  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ . В данной работе рассматривается аналогичная задача для случая антисимметричной нагрузки оболочки.

Представляя компоненты тензора  $\{e_{ij}\}$  геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + e_{ij}^0 \quad (i, j = \alpha, \beta), \quad (1)$$

где  $e_{ij}^0$  — компоненты тензора дисторсии,  $e_{ij}^{(s)}$  — компоненты тензора упругой деформации, систему уравнений в перемещениях для круговой цилиндрической оболочки в случае технической теории [1] запишем так [3]:

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w = q_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты перемещений срединной поверхности оболочки,  $L_{km}$  — известные линейные дифференциальные операторы,  $q_k$  — функции, зависящие от осредненных по толщине оболочки компонентов тензора дисторсии  $\varepsilon_j^0, \kappa_j^0$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Для бесконечной оболочки решение системы уравнений (2), затухающее на бесконечности, запишем в виде

$$u^{(1)} = \sum_{j=1}^3 L_{ju}\varphi_j + P_{ju}\psi_j, \quad v^{(1)} = \sum_{j=1}^3 L_{jv}\varphi_j + P_{jv}\psi_j, \quad w^{(1)} = \sum_{j=1}^3 L_{jw}\varphi_j + P_{jw}\psi_j. \quad (3)$$

Здесь  $L_{ju}, P_{ju}, L_{jv}, P_{jv}, L_{jw}, P_{jw}$  — линейные дифференциальные операторы порядка, не выше седьмого [3], а функции  $\varphi_j, \psi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$D\varphi_j = \varepsilon_j^0, \quad D\psi_j = \kappa_j^0, \quad (4)$$

где

$$D = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad c^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2},$$

$R, h$  — соответственно радиус и полутолщина оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

При приведенных выше предположениях о нагрузке оболочки и ориентации трещины поле дисторсии, характеризующее скачки перемещений и углов поворота, примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^0(\alpha, \beta) &= \varepsilon(\alpha) \delta(\beta), \quad \kappa_3^0(\alpha, \beta) = -\frac{1}{R} \kappa(\alpha) \delta(\beta) \quad \text{при } |\alpha| < \alpha_0, \\ \varepsilon_3^0(\alpha, \beta) &= \kappa_3^0(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq \alpha_0, \\ \varepsilon_1^0(\alpha, \beta) &= \varepsilon_2^0(\alpha, \beta) = \kappa_1^0(\alpha, \beta) = \kappa_2^0(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при всех } \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$