

или в покомпонентной записи

$$a_i = \sum_{k=1}^{n+1-i} \rho_{n+1-i-k} \sum_{j=1}^n \frac{x_k^{j-1} y_j}{p'(x_j)}. \quad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н ц о ш К. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1971.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера

Рассмотрим бесконечную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, контактирующую вдоль поверхности $x = h$ с теплопроводящей средой. В начальный момент времени температура пластинки и среды равна нулю. Определим такое изменение во времени температуры $\theta(\tau)$ на поверхности $x = -h$, при котором за заданный конечный промежуток времени τ_1 обеспечивается повышение температуры на поверхности $x = h$ до заданной величины t_0 , при оптимально низком уровне напряженно-деформированного состояния пластинки. При этом упругими свойствами среды $x > h$ пренебрегаем.

Температура пластинки $t_1(x, \tau)$ и теплопроводящей среды $t_2(x, \tau)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$a_1 \frac{\partial^2 t_1(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (-h < x < h), \quad (1)$$

$$a_2 \frac{\partial^2 t_2(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (x > h) \quad (2)$$

таким начальным и граничным условиям:

$$t_1(x, 0) = 0, \quad t_2(x, 0) = 0; \quad (3)$$

$$t_1(h, \tau) = t_2(h, \tau), \quad k_1 \frac{\partial t_1(h, \tau)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial t_2(h, \tau)}{\partial x}; \quad (4)$$

$$t_1(-h, \tau) = \theta(\tau), \quad \frac{\partial t_2(\infty, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Здесь a_1, k_1, a_2, k_2 — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности пластинки и среды.

В дальнейшем будем исходить из операторной формы решения уравнения теплопроводности (1), ограничиваясь кубическим законом изменения температуры по толщине пластинки [1, 2]:

$$t_1(x, u) = T + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) \dot{T} + \frac{x}{h} T_* + \frac{x}{2h} \left(\frac{x^2}{3h^2} - \frac{1}{5} \right) \dot{T}_*, \quad (6)$$

где $u = \frac{a_1 \tau}{h^2}$, $T = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_1(x, u) dx$, $T_* = \frac{2}{3h^2} \int_{-h}^h x t_1(x, u) dx$; точкой обозначены производные функций T, T_* по u . Тогда первые из условий (3), (5), а также условия идеального контакта (4) запишутся в виде

$$T = \dot{T} = T_* = \dot{T}_* = 0 \quad \text{при} \quad u = 0, \quad (7)$$

$$T + \frac{1}{3} \dot{T} - T_* - \frac{1}{15} \dot{T}_* = \theta(u), \quad (8)$$

$$T + \frac{1}{3} \dot{T} + T_* + \frac{1}{15} \dot{T}_* = t_2(h, u), \quad (9)$$

$$\dot{T} + T_* + \frac{2}{5} \dot{T}_* = \frac{k_2}{k_1} \cdot h \cdot \frac{\partial t_2(h, u)}{\partial u}. \quad (10)$$

С другой стороны, решая уравнение (2) при нулевом начальном условии (3) с учетом соотношений (9), (10), получаем условие

$$\dot{T} + T_* + \frac{2}{5} \dot{T}_* = -\frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2 \pi}} f(u), \quad (11)$$

$$f(u) = \int_0^u (\dot{T} + \frac{1}{3} \ddot{T} + \dot{T}_* + \frac{1}{15} \ddot{T}_*) \frac{d\xi}{\sqrt{u - \xi}},$$

которое отражает влияние теплопроводящей среды на температурное поле пластинки.

Для определения искомой функции $\theta(u)$ в качестве функционального критерия оптимальности принимаем условие минимума функционала энергии упругой деформации пластинки [1], который в нашем случае имеет вид

$$M = \frac{2\alpha^2 E h}{3(1-\nu)} \int_0^{u_1} \left(\frac{1}{15} \dot{T}^2 + T_*^2 + \frac{1}{525} \dot{T}_*^2 \right) du. \quad (12)$$

Пусть функция $\theta(u)$ подчинена системе интегральных условий

$$\int_0^u u^i \theta(u) du = A_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (13)$$

где A_i — некоторые постоянные, которые будут использованы для удовлетворения ограничений, налагаемых условиями нагрева.

Из необходимого условия экстремума функционала (12) на множестве допустимых функций $T, T_*, \theta(u)$ при условиях (8), (11), (13) получаем следующую систему уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{2}{15} \ddot{T} + \dot{\lambda}(u) + L \dot{g}(u) - \frac{L}{3} \ddot{g}(u) - \sum_{i=0}^n \mu_i \left(u^i - \frac{i}{3} u^{i-1} \right) &= 0, \\ \frac{2}{525} \ddot{T}_* - 2T_* - \lambda(u) + \frac{2}{5} \dot{\lambda}(u) + L \dot{g}(u) - \frac{L}{15} \ddot{g}(u) + & \\ + \sum_{i=0}^n \mu_i \left(u^i - \frac{i}{15} u^{i-1} \right) &= 0, \\ g(u) = \int_u^{u_1} \lambda(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - u}}. & \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $L = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2 \pi}}$, а $\lambda(u), \mu_i$ — множители Лагранжа.

Система (14) вместе с уравнениями (8) и (11) образует замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений для определения искомых функций $\theta(u), T, T_*$.

Решаем задачу в случае, когда на поверхности пластинки $x = h$ температура $t_1(x, u)$, плавно изменяясь, достигает максимальной величины, равной t_0 , т. е. функции T и T_* удовлетворяют следующим условиям:

$$T + \frac{1}{3} \dot{T} + T_* + \frac{1}{15} \dot{T}_* = t_0, \quad \dot{T} + \frac{1}{3} \ddot{T} + \dot{T}_* + \frac{1}{15} \ddot{T}_* = 0 \quad \text{при } u = u_1.$$

Эти соотношения и начальные условия (7) удовлетворяются соответствующим подбором коэффициентов μ_i и постоянных интегрирования системы (11), (14).

Для приближенного решения системы (11), (14) функции $f(u)$ и $g(u)$ аппроксимируем полиномами

$$f(u) = \sum_{i=0}^m d_i u^i, \quad g(u) = \sum_{i=0}^m b_i u^i. \quad (15)$$

После нахождения решения полученной таким образом системы линейных дифференциальных уравнений коэффициенты разложения системы (15) можно определить из таких интегральных условий:

$$\frac{1}{u_1^{p+1}} \int_0^{u_1} u^p \left[\int_0^u \left(\dot{T} + \frac{1}{3} \ddot{T} + T_* + \frac{1}{15} \ddot{T}_* \right) \frac{d\xi}{\sqrt{u-\xi}} \right] du = \sum_{i=0}^p \frac{d_i}{p+i},$$

$$\frac{1}{u_1^{p+1}} \int_0^{u_1} u^p \left[\int_u^{u_1} \lambda(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-u}} \right] du = \sum_{i=0}^p \frac{b_i}{p+i} \quad (p = 0, 1, \dots, m).$$

Результаты численных расчетов проведены для стальной пластинки и среды с тепловыми характеристиками $a_2 = 14 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$, $k_2 = 0,6 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ при $u_1 = 10$.

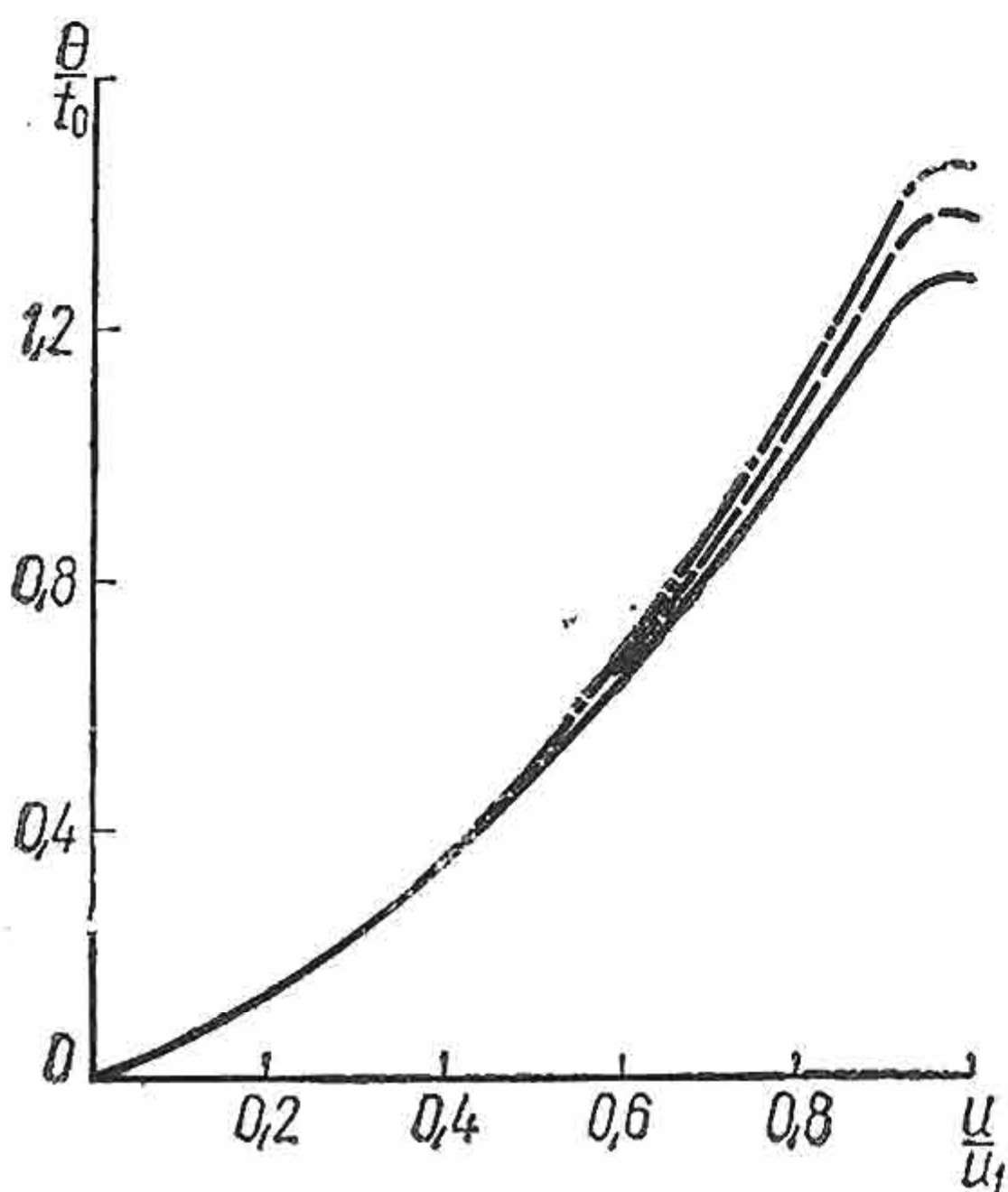


Рис 1

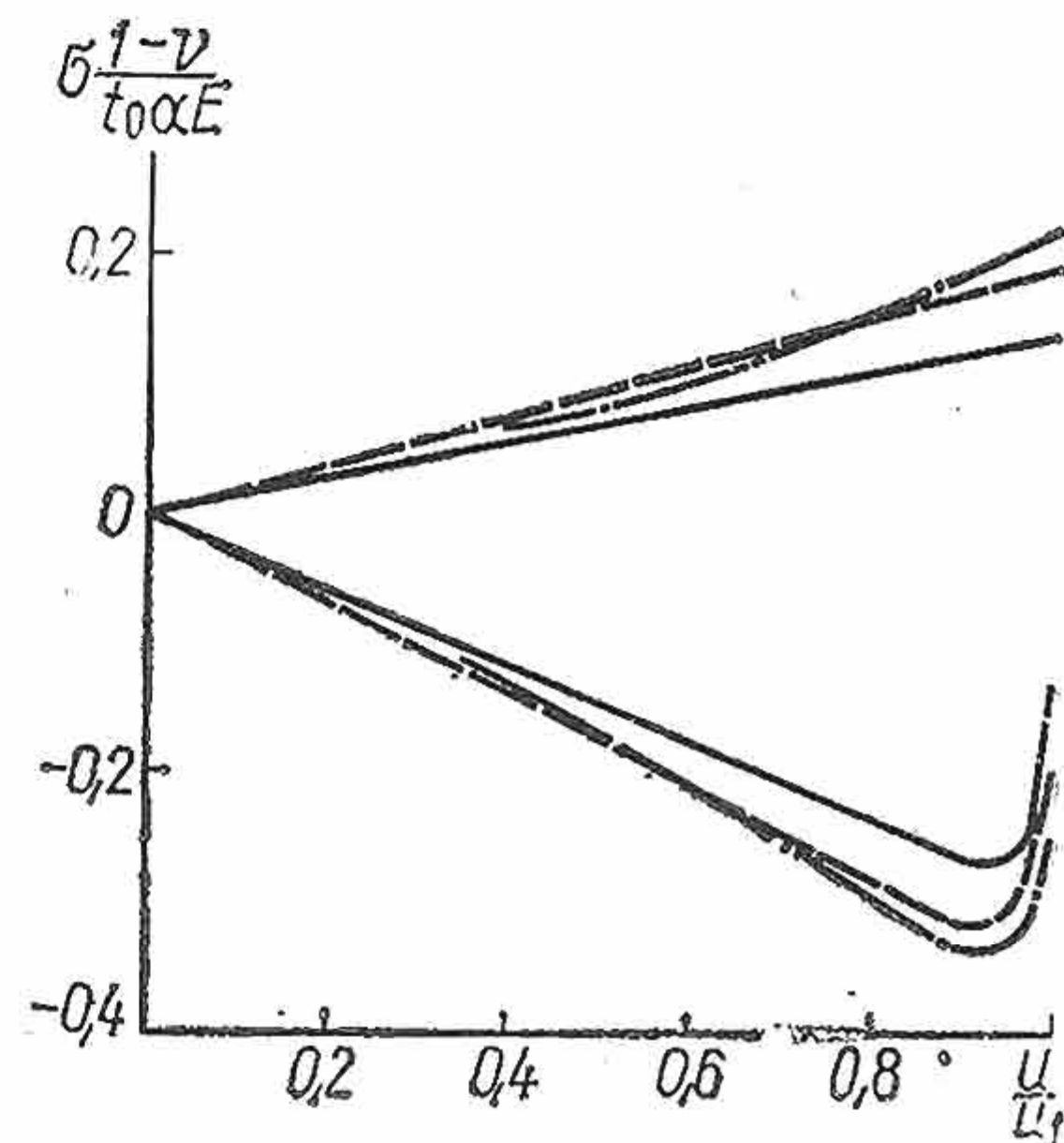


Рис. 2

На рисунках штриховой линией изображены графики изменения управляющей функции $\theta(u)$ (рис. 1) и температурных напряжений на поверхностях пластинки (рис. 2) при линейном приближении функций $f(u)$, $g(u)$ и штрихпунктирной — при квадратичном приближении. Сплошные линии соответствуют случаю, когда поверхность пластинки $x = h$ теплоизолирована. На поверхности $x = h$ напряжения положительные, а на поверхности $x = -h$ — отрицательные.

Отметим, что для среды с тепловыми характеристиками воздуха кривые изменения управляющей функции $\theta(u)$ практически совпадают со случаем теплоизоляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у р а к Я. И., Б у д з С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки. — Прикладная механика, 1971, 10, 2.
2. П і д с т р и г а ч Я. С., Я р е м а С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1974 г.