К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ «ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ»

А. И. Балинский, Л. М. Зорий

Пусть имеется уравнение

$$Wa = y, \tag{1}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

x_i ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$), y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — заданные вещественные числа. Нахождение решения уравнения (1) известно под названием задачи «взвешенных моментов». Это — основная задача прикладного анализа, которая встречается в многочисленных сочетаниях [1].

В настоящей статье предлагается прием построения численного алгоритма решения задачи «взвешенных моментов». Аналогично рассматривается сопряженное к (1) уравнение

$$W^T a = y, \tag{2}$$

где W^T — транспонированная матрица W.

Образуем сначала многочлен

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n \tag{3}$$

и поставим ему в соответствие матрицу

$$P = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_1 & 1 \\ p_{n-2} & p_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеет место следующее проверяемое непосредственно и основное здесь соотношение:

$$W^T P W = p'(D), \tag{4}$$

где D — диагональная матрица с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Из соотношения (4) находим выражение для матрицы W^{-1} и вектор-решение a уравнения (1) представляем в виде

$$a = [p'(D)]^{-1} W^T P y. \tag{5}$$

Определяя компоненты вектора $q = Py$:

$$q_i = \sum_{k=1}^{n+1-i} p_{n+1-i-k} y_k \qquad (p_0 = 1,\ i = 1, 2, \dots, n)$$

и образуя по ним многочлен

$$q(x) = q_1 + q_2 x + \cdots + q_n x^{n-1}, \tag{6}$$

из выражения (5) получаем, что компоненты вектора a определяются формулами

$$a_i = q(x_i)/p'(x_i). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь уравнение (2). Определяя из соотношения (4) матрицу $(W^T)^{-1}$, находим

$$a = PW[p'(D)]^{-1} y,$$

или в покомпонентной записи

$$a_i = \sum_{k=1}^{n+1-i} p_{n+1-i-k} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_k^{j-1} y_j}{p'(x_j)}. \qquad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1971.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера

Рассмотрим бесконечную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, контактирующую вдоль поверхности $x = h$ с теплопроводящей средой. В начальный момент времени температура пластинки и среды равна нулю. Определим такое изменение во времени температуры $\theta(\tau)$ на поверхности $x = -h$, при котором за заданный конечный промежуток времени τ_1 обеспечивается повышение температуры на поверхности $x = h$ до заданной величины t_0, при оптимально низком уровне напряженно-деформированного состояния пластинки. При этом упругими свойствами среды $x > h$ пренебрегаем.

Температура пластинки $t_1(x, \tau)$ и теплопроводящей среды $t_2(x, \tau)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$a_1 \frac{\partial^2 t_1(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial \tau} = 0 \qquad (-h < x < h), \qquad (1)$$

$$a_2 \frac{\partial^2 t_2(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial \tau} = 0 \qquad (x > h) \qquad (2)$$

таким начальным и граничным условиям:

$$t_1(x, 0) = 0, \ t_2(x, 0) = 0; \qquad (3)$$

$$t_1(h, \tau) = t_2(h, \tau), \quad k_1 \frac{\partial t_1(h, \tau)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial t_2(h, \tau)}{\partial x}; \qquad (4)$$

$$t_1(-h, \tau) = \theta(\tau), \quad \frac{\partial t_2(\infty, \tau)}{\partial x} = 0. \qquad (5)$$

Здесь a_1, k_1, a_2, k_2 — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности пластинки и среды.

В дальнейшем будем исходить из операторной формы решения уравнения теплопроводности (1), ограничиваясь кубическим законом изменения температуры по толщине пластинки [1, 2]:

$$t_1(x, u) = T + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{3}\right)\dot{T} + \frac{x}{h} T_* + \frac{x}{2h}\left(\frac{x^2}{3h^2} - \frac{1}{5}\right)\dot{T}_*, \qquad (6)$$

где $u = \frac{a_1 \tau}{h^2}$, $T = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t_1(x, u)\,dx$, $T_* = \frac{2}{3h^2}\int_{-h}^{h} x t_1(x, u)\,dx$; точкой обозначены производные функций T, T_* по u. Тогда первые из условий (3), (5), а также условия идеального контакта (4) запишутся в виде

$$T = \dot{T} = T_* = \dot{T}_* = 0 \quad \text{при} \quad u = 0, \qquad (7)$$

$$T + \frac{1}{3}\dot{T} - T_* - \frac{1}{15}\dot{T}_* = \theta(u), \qquad (8)$$