О ВЫРАЖЕНИЯХ ДЛЯ РЕЗУЛЬТАНТА И ДИСКРИМИНАНТА МНОГОЧЛЕНОВ

А. И. Балинский

Пусть даны многочлены

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^s + b_1x^{s-1} + \cdots + b_{s-1}x + b_s$$

с комплексными коэффициентами, причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Корни первого многочлена обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, второго — через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Величину

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j)$$

называют результантом многочленов $f(x)$ и $g(x)$ [1].

Предполагая для определенности, что $n \geqslant s$, дадим выражение для $R(f, g)$ в виде определителя n-го порядка с относительно простой зависимостью его элементов от коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Введем соответствующие многочлену $f(x)$ матрицы

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-2} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad S_f = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0^{-1}a_n & -a_0^{-1}a_{n-1} & -a_0^{-1}a_{n-2} & \ldots & -a_0^{-1}a_2 & -a_0^{-1}a_1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений между ними:

$$FW = W\Lambda, \tag{1}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$;

$$W^t S_f W = f'(\Lambda), \tag{2}$$

t — обозначение операции транспонирования.

Возникающие далее матрицы $S_f F^k$ непосредственно выражаются через коэффициенты многочлена $f(x)$ и имеют вид

$$S_f F^k = \mathrm{diag}(F_k, F_{n-k}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где

$$F_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & \ldots & -a_n & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -a_n & \ldots & -a_{n-k+3} & -a_{n-k+2} \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_{n-k+2} & -a_{n-k+1} \end{bmatrix},$$

$$F_{n-k} = \begin{bmatrix} a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_{n-k-2} & a_{n-k-3} & \ldots & a_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. *Результант $R(f, g)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выражается формулой*

$$R(f, g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{s-n} |S_f g(F)|. \qquad (4)$$

Доказательство. Используя соотношения (1) и (2), находим

$$W^t S_f g(F) W = f'(\Lambda) g(\Lambda)$$

и, следовательно,

$$|W^t| |W| |S_f g(F)| = \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i).$$

Так как

$$|W^t| |W| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-n} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i), \quad R(f, g) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i),$$

то

$$\prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) [R(f, g) - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{s-n} |S_f g(F)|] = 0.$$

Если корни многочлена $f(x)$ просты, то формула (4) следует из последнего соотношения. В случае кратных корней $f(x)$ ее справедливость вытекает из непрерывности.

Произведение

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

называют дискриминантом многочлена $f(x)$ [1].

Используя известное соотношение

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D$$

и формулу (4), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для дискриминанта D многочлена $f(x)$ имеет место представление*

$$D = a_0^{-2} |S_f f'(F)|. \qquad (5)$$

Заметим, что элементы матриц, входящих в формулы (4) и (5), весьма просто определяются с учетом представлений (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. «Наука», М., 1968.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 1974 г.