3. Ярема С. Я., Саврук М. П. Влияние кривизны на напряженное состояние оболочки с трещиной.— Прикладная механика, 1970, 6, 11.
4. Turcotte D. L. Membrane tectonics.— Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1974, 36, 1.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Я. И. Бурак, Б. И. Колодий, В. Ф. Кондрат

Пусть электропроводное неферромагнитное изотропное упругое тело, ограниченное поверхностью (S), помещено в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$ и контактирует с внешней средой, которая принимается в приближении вакуума. На границе тела задано силовое нагружение $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \exp(i\omega\tilde{t})$, где ω — циклическая частота.

Механо-электромагнитные процессы в теле в пренебрежении токами смещения описываются системой уравнений магнитоупругости [2], которую представим в виде

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \beta^2\Delta\vec{u} + (1-\beta^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + s^2\,[\mathrm{rot}\,\vec{b},\ \vec{r}_0] + \Phi_0\frac{s^2}{4}\Big\{(1-i)\,([\mathrm{rot}\,\vec{b},\ \vec{b}] + [\mathrm{rot}\,\vec{b}^*,\ \vec{b}^*]) + (1+i)\,([\mathrm{rot}\,\vec{b},\ \vec{b}^*] + [\mathrm{rot}\,\vec{b}^*,\ \vec{b}])\Big\},$$

$$\Delta\vec{b} - \varkappa^2\frac{\partial\vec{b}}{\partial t} + \varkappa^2\,\mathrm{rot}\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{r}_0\right] + \Phi_0\frac{\varkappa^2}{4}\,\mathrm{rot}\left\{(1-i)\left(\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{b}\right] + \left[\frac{\partial\vec{u}^*}{\partial t},\ \vec{b}^*\right]\right) + (1+i)\left(\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{b}^*\right] + \left[\frac{\partial\vec{u}^*}{\partial t},\ \vec{b}^*\right]\right)\right\} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{b} - \varkappa^2\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{r}_0\right] - \Phi_0\frac{\varkappa^2}{4}\left\{(1-i)\left(\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{b}\right] + \left[\frac{\partial\vec{u}^*}{\partial t},\ \vec{b}^*\right]\right) + (1+i)\left(\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{b}^*\right] + \left[\frac{\partial\vec{u}^*}{\partial t},\ \vec{b}\right]\right)\right\},$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}^{(0)} = -\varkappa^2\frac{\partial\vec{b}^{(0)}}{\partial t},\quad \frac{\partial\vec{E}^{(0)}}{\partial t} = \xi^2\,\mathrm{rot}\,\vec{b}^{(0)},$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \mathrm{div}\,\vec{b} = \mathrm{div}\,\vec{E}^{(0)} = \mathrm{div}\,\vec{b}^{(0)} = 0.$$

Граничные и начальные условия будут такими:

$$\sigma_{kj}n_j = \frac{F_k}{F_0}e^{it},$$
$$\vec{E}_\tau = \vec{E}_\tau^{(0)},\quad \vec{b}_\tau = \vec{b}_\tau^{(0)}\quad \text{на поверхности}\quad (S), \tag{2}$$

$$\left(\vec{u},\ \vec{E},\ \vec{b},\ \vec{E}^{(0)},\ \vec{b}^{(0)},\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \frac{\partial\vec{E}^{(0)}}{\partial t},\ \frac{\partial\vec{b}^{(0)}}{\partial t}\right) = 0 \qquad \text{при } t = 0. \tag{3}$$

На бесконечности должны удовлетворяться условия излучения. Здесь

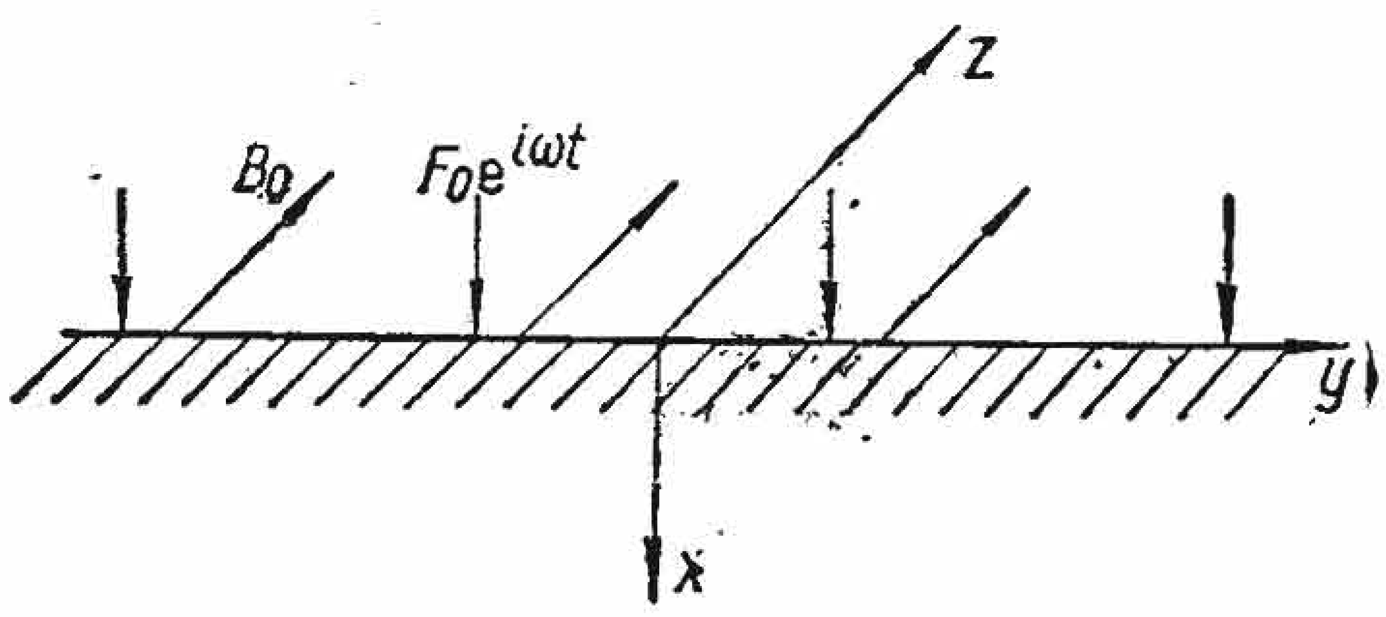
$$\vec{u} = \frac{\Omega_1 \vec{\tilde{u}}}{\Phi_0}; \quad \vec{b},\ \vec{b}^{(0)} = \frac{\vec{\tilde{b}},\ \vec{\tilde{b}}^{(0)}}{B_0 \Phi_0}; \quad \vec{E},\ \vec{E}^{(0)} = \frac{\sigma\mu \vec{\tilde{E}},\ \vec{\tilde{E}}^{(0)}}{\Omega_1 B_0 \Phi_0};$$

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = \Omega_1 (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3), \quad t = \omega \tilde{t}; \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{B}_0}{B_0},$$

$$\varkappa^2 = \frac{\omega\sigma\mu}{\Omega_1^2}, \quad s^2 = \frac{B_0^2}{\rho\mu c_1^2}, \quad \xi^2 = \frac{\sigma\mu}{\omega\varepsilon_0\mu_0}; \quad \beta = \frac{c_2}{c_1},$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \Phi_0 = \frac{F_0}{\rho c_1^2}, \quad F_0 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}, \tag{4}$$

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ — координаты, $\tilde{t}$ — время, $\vec{\tilde{u}}$ — вектор перемещения, $\vec{\tilde{b}}$ и $\vec{\tilde{b}}^{(0)}$ — возмущения индукции магнитного поля, $\vec{\tilde{E}}$ и $\vec{\tilde{E}}^{(0)}$ — напряженности электрического поля в среде и вакууме соответственно, c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной упругих волн, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, μ и μ_0 ($\mu \approx \mu_0$) — магнитные проницаемости среды и вакуума; σ — электропроводность, ρ — плотность среды, n_j — компоненты вектора внешней нормали и поверхности (S), $\sigma_{kj} = 2\rho c_2^2 e_{kj} + \rho\,(c_1^2 - 2c_2^2)\, e_{mm}\delta_{kj}$ — компоненты тензора напряжений, $e_{kj} = \dfrac{\tilde{e}_{kj}}{\Phi_0}$, $\tilde{e}_{kj}$ — компоненты тензора деформаций.



Решение системы нелинейных уравнений магнитоупругости можно получить, используя метод разложения по малому параметру, в качестве которого принимается величина Φ_0, и интегральную операцию «осреднения» [1] с целью разделения искомого решения на периодическую и медленно меняющуюся составляющие.

Рассмотрим установившиеся нелинейные магнитоупругие колебания электропроводного полупространства при заданной равномерно распределенной на его поверхности нормальной силовой нагрузки (рисунок).

Применяя описанную выше схему решения задачи, ограничиваясь при этом первыми двумя членами в разложении искомых функций по малому параметру, для перемещения $\vec{u}(x,\ t) = (u\,(x,\ t),\ 0,\ 0)$ и индукции возмущенного магнитного поля $\vec{b}\,(x,\ t) = (0,\ 0,\ b\ (x,\ t))$ получаем выражения

$$u\,(x,\ t) = \operatorname{Re}\Bigg\{ \sum_{j,m=1}^{2} (-1)^{j+1}\, mi\Phi_0^{m-1}\, [a_1^{(m)} - a_2^{(m)}]^{-1}\, a_{3-j}^{(m)} \Lambda_j^{(m)} A_j^{(m)} \times$$

$$\times\, e^{-mi(\Lambda_j^{(m)} x - t)} + \Phi_0\, [a_1^{(2)} - a_2^{(2)}]^{-1} \left[a_1^{(2)} \frac{\partial h_2}{\partial x} - a_2^{(2)} \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] e^{2it} \Bigg\} +$$

$$+\, \Phi_0 \frac{s^2}{4} \sum_{j,m=1}^{2} \Big\langle (-1)^m (\varkappa^2)^{2-m} \frac{[\operatorname{Re}(a_{3-j}^{(1)} \Lambda_j^{(1)})]^{2-m}\, |A_j^{(1)}|^2}{|a_1^{(1)} - a_2^{(1)}|^2\, (2 \operatorname{Im} \Lambda_j^{(1)})^{\frac{2}{m}}} \times$$

$$\times\, [e^{2 \operatorname{Im} \Lambda_j^{(1)} x} - 1 - \delta_{1m}\, 2 \operatorname{Im} \Lambda_j^{(1)} x] +$$

$$+\, (-1)^{m+1}\, 2 \operatorname{Re} \Bigg\{ \frac{(a_1^{(1)} \Lambda_2^{(1)} + a_2^{(1)*} \Lambda_1^{(1)*})\, A_2^{(1)} A_1^{(1)*}}{|a_1^{(1)} - a_2^{(1)}|^2\, i\, (\Lambda_1^{(1)*} - \Lambda_2^{(1)})} \times$$

$$\times \left[e^{i(\Lambda_1^{(1)*}-\Lambda_2^{(1)})x} - 1 - i\delta_{1m}(\Lambda_1^{(1)*} - \Lambda_2^{(1)})x\right]\Big\}\Big\rangle, \tag{5}$$

$$b(x, t) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{j,m=1}^{2} (-1)^{j+1}\Phi_0^{m-1} \frac{A_j^{(m)} e^{-mi(\Lambda_j^{(m)}x - t)}}{a_1^{(m)} - a_2^{(m)}} + \right.$$

$$\left. + \Phi_0 \frac{h_1 - h_2}{a_1^{(2)} - a_2^{(2)}} e^{2it}\right\} - \Phi_0 \frac{\varkappa^2}{4} \left\langle \sum_{j=1}^{2} \frac{\operatorname{Re}(a_{3-j}^{(1)}\Lambda_j^{(1)}) \mid A_j^{(1)} \mid^2}{\mid a_1^{(1)} - a_2^{(1)} \mid^2 2 \operatorname{Im}\Lambda_j^{(1)}} \times \right.$$

$$\times (e^{2\operatorname{Im}\Lambda_j^{(1)}x} - 1) - \operatorname{Re}\left\{\frac{(a_1^{(1)}\Lambda_2^{(1)} + a_2^{(1)*}\Lambda_1^{(1)*}) A_2^{(1)} A_1^{(1)*}}{\mid a_1^{(1)} - a_2^{(1)} \mid^2 i(\Lambda_1^{(1)*} - \Lambda_2^{(1)})} \left[e^{i(\Lambda_1^{(1)*} - \Lambda_2^{(1)})x} - 1\right]\right\}\Big\rangle. \tag{6}$$

Здесь

$$A_j^{(m)} = \frac{\Delta_j^{(m)}}{\Delta_m}, \quad \Delta_j^{(1)} = (a_1^{(1)} - a_2^{(1)})\,[\xi\varkappa - i\Lambda_{3-j}^{(1)}(\Lambda_j^{(1)})^2],$$

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^k (\Lambda_k^{(1)})^2 a_{3-k}^{(1)} [\xi\varkappa - i(\Lambda_k^{(1)})^2 \Lambda_{3-k}^{(1)}],$$

$$\Delta_1^{(2)} = \lambda_4\psi_1 - \lambda_2\psi_2, \quad \Delta_2^{(2)} = \lambda_1\psi_2 - \lambda_3\psi_1,$$

$$\Delta_2 = \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3, \quad \lambda_j = (-1)^{j+1} 4a_{3-j}^{(2)}(\Lambda_j^{(2)})^2,$$

$$\lambda_{2+j} = (-1)^j [2i\Lambda_j^{(2)}(\Lambda_{3-j}^{(2)})^2 - \xi\varkappa],$$

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^k a_k^{(2)} \frac{\partial^2 h_{3-k}^{(0)}}{\partial x^2}, \quad \psi_2 = \xi\varkappa\,[h_1^{(0)} - h_2^{(0)}] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \left\{(-1)^k (\Lambda_{3-k}^{(2)})^2 \frac{\partial h_k^{(0)}}{\partial x} + (1 - i)\frac{\varkappa^2}{4} \frac{a_1^{(2)} - a_2^{(2)}}{(a_2^{(1)} - a_2^{(1)})^2} \times \right.$$

$$\left. \times [a_{3-j}^{(1)}\Lambda_j^{(1)}(A_j^{(1)})^2 - a_{3-j}^{(1)}\Lambda_j^{(1)} A_1^{(1)} A_2^{(1)}]\right\},$$

$$h_j(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{F_k^{(j)} e^{-2i\Lambda_k^{(1)}x}}{4[(\Lambda_j^{(2)})^2 - (\Lambda_k^{(1)})^2]} + \frac{F_3^{(j)} e^{-i(\Lambda_1^{(1)} + \Lambda_2^{(1)})x}}{4(\Lambda_j^{(2)})^2 - (\Lambda_1^{(1)} + \Lambda_2^{(1)})^2},$$

$$F_m^{(j)} = \frac{1 - i}{2} [s^2(\Lambda_j^{(2)})^2 + ia_j^{(2)}\varkappa^2 a_{3-m}^{(1)}(\Lambda_m^{(1)})^2] \frac{(A_m^{(1)})^2}{(a_1^{(1)} - a_2^{(1)})^2},$$

$$F_3^{(j)} = (i - 1)\,[s^2(\Lambda_j^{(2)})^2 + ia_j^{(2)} \frac{\varkappa^2}{4} (\Lambda_1^{(1)} + \Lambda_2^{(1)})(a_1^{(1)}\Lambda_2^{(1)} + a_2^{(1)}\Lambda_1^{(1)})] \times$$

$$\times \frac{A_1^{(1)} A_2^{(1)}}{(a_1^{(1)} - a_2^{(1)})^2},$$

$$\Lambda_j^{(m)} = \sqrt{1 + mi\varkappa^2 a_j^{(m)}}, \quad \operatorname{Im}\Lambda_j^{(m)} < 0,$$

$a_j^{(m)}$ определяются как решения уравнения

$$(a^{(m)})^2 + \frac{m + i\varkappa^2(1 + s^2)}{m^2 i\varkappa^2} a^{(m)} + \frac{s^2}{m^3 i\varkappa^2} = 0, \qquad j, m = 1, 2.$$

Из формул (5) и (6) видно, что для установившихся магнитоупругих колебаний нелинейность приводит к возникновению постоянных во времени неоднородных перемещения и магнитного поля, а также волн высших гармоник. Уже первое приближение дает пять дополнительных к линеаризованному приближению волн $\sim e^{-2i\Lambda_1^{(1)}x}$, $\sim e^{-2i\Lambda_1^{(2)}x}$, которые назовем модифицированными упругими волнами второй гармоники, $\sim e^{-2i\Lambda_2^{(1)}x}$, $\sim e^{-2i\Lambda_2^{(2)}x}$, которые назовем модифицированными электромагнитными волнами второй гармоники, и $\sim e^{-i(\Lambda_1^{(1)}+\Lambda_2^{(1)})x}$ — модифицированную волну второй гармоники «смешанного» типа. Модифицированные электромагнитные волны и волна «смешанного» типа носят спиновый характер, модифицированные упругие волны — объемные, хотя коэффициенты поглощения их и больше коэффициентов поглощения модифицированных упругих волн основной гармоники.

Модифицированные упругие волны второй гармоники можно объединить, и тогда часть перемещения, соответствующая им, запишется в виде

$$u_1(x, t) \approx \mathrm{Re}\,\{Ae^{-2i(\Lambda_1^{(1)}x-t)}[1-e^{-2i(\Lambda_1^{(2)}-\Lambda_1^{(1)})x}]\}, \qquad (7)$$

где $A = \mathrm{const}$.

Как показывает анализ, выражение (7) описывает волну второй гармоники, фазовая скорость распространения которой равна фазовой скорости распространения соответствующей волны первой гармоники, но амплитуда изменяется с расстоянием — сначала растет, потом уменьшается. Полученные решения могут быть использованы для определения пределов применения линеаризованной системы уравнения магнитоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, К., 1937.
2. Пелетминський С. В. Про об'ємні та поверхневі магнітопружні хвилі.— УФЖ, 1958, 3, 5.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в мае 1975 г.