

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗЕМНОЙ КОРЫ, ОБУСЛОВЛЕННОГО ПЛАНЕТАРНЫМИ РАЗЛОМАМИ

В. А. Осадчук, О. И. Юркевич, И. И. Литвин

Вследствие эллиптичности Земли, литосфера на разных широтах имеет разный радиус кривизны. При перемещении литосферных плит в меридиональном направлении их радиус кривизны будет изменяться. Это изменение приводит к появлению дополнительных напряжений, которые, как показано в работе [4], могут оказаться достаточными для того, чтобы вызвать разлом плит. Так как толщина литосферных плит значительно меньше радиуса кривизны, то в рассматриваемой работе для анализа напряжений в плитах использована теория тонких оболочек. Здесь же показано, что напряжения, обусловленные изменением радиуса кривизны, могут достигать таких величин, при которых возможен разлом литосферы. Следовательно, актуальным является вопрос об изучении равновесного состояния литосферы при наличии в ней разломов (трещин). Для этого в настоящей работе в качестве приближенной расчетной модели принята пологая сферическая оболочка на упругом основании типа Винклера с прямолинейной в плане трещиной. При этом рассматривается случай, когда оболочка находится под действием симметричной относительно трещины нагрузки.

Используя приведенный в работе [2] метод определения напряженно-деформированного состояния в оболочках с трещинами, для рассматриваемой пологой сферической оболочки с трещиной получаем систему дифференциальных уравнений относительно функции напряжений φ и функции прогибов w :

$$\frac{R}{D_0 l^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \nabla^2 w = R F_1^0(x, y),$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{D_1 R}{l^2} \nabla^2 \nabla^2 w + k R l^2 w = -D_1 R F_2^0(x, y),$$
(1)

где

$$F_1^0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_{22}^0(x, y), \quad F_2^0 = \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \kappa_{22}^0(x, y),$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_0 = 2Eh, \quad D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},$$

k — коэффициент упругого основания, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона, R и $2h$ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки, $2l$ — длина трещины, x, y — отнесенные к полудлине трещины прямоугольные декартовы координаты, ось Ox направлена вдоль линии трещины, а начало координат совпадает со серединой трещины. При этом усилия и моменты в оболочке определяются по формулам

$$N_1 = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_2 = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad M_1 = \frac{D_1}{l^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu l^2 \kappa_{22}^0 \right), \quad M_2 =$$

$$= \frac{D_1}{l^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + l^2 \kappa_{22}^0 \right).$$
(2)

Функции $\varepsilon_{22}^0, \kappa_{22}^0$ выражаются через скачки нормальных к линии трещины перемещений v и углов поворота θ_2 следующим образом:

$$\varepsilon_{22}^0(x, y) = \varepsilon_2(x) \delta(y), \quad \kappa_{22}^0(x, y) = \kappa_2(x) \delta(y) \quad \text{при } |x| < 1,$$

$$\varepsilon_{22}^0(x, y) = \kappa_{22}^0(x, y) = 0 \quad \text{при } |x| \geq 1,$$
(3)

где

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{l} (v^+ - v^-), \quad \kappa_2(x) = -\frac{1}{l} (\theta_2^+ - \theta_2^-),$$

$\delta(y)$ — функция Дирака. Значками «+» и «-» обозначено граничные значения соответствующей величины слева и справа от трещины.

Подставив выражение (3) в уравнения (1) и решив последние, найдем разрешающие функции φ и ω :

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & \frac{AR\lambda^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \varepsilon_2(\xi) \left[\left(\frac{2}{\lambda^2 \rho^2} + \frac{2 \operatorname{ker}' \lambda \rho}{\lambda \rho} + \operatorname{kei} \lambda \rho \right) \frac{y^2}{\rho^2} - \left(\frac{1}{\lambda^2 \rho^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{ker}' \lambda \rho}{\lambda \rho} + \operatorname{kei} \lambda \rho \right) \right] d\xi - \frac{l^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \kappa_2(\xi) \left\{ (1 - \nu) \left[\left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} - \operatorname{ker} \lambda \rho \right) \frac{y^2}{\rho^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} \right] - \nu \operatorname{ker} \lambda \rho \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{AD_0 l^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \varepsilon_2(\xi) \left[\left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} - \operatorname{ker} \lambda \rho \right) \frac{y^2}{\rho^2} - \frac{\operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} + \operatorname{ker} \lambda \rho + \right. \\ & \left. + \frac{1 - A}{2A} \left(\frac{y^2}{\rho^2} - \ln \rho - \frac{1}{2} \right) \right] d\xi + \frac{D_1 R A \lambda^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \kappa_2(\xi) \left\{ (1 - \nu) \left[\left(\frac{2}{\lambda^2 \rho^2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2 \operatorname{kei}' \lambda \rho}{\lambda \rho} + \operatorname{kei} \lambda \rho \right) \frac{y^2}{\rho^2} - \left(\frac{1}{\lambda^2 \rho^2} + \frac{\operatorname{ker}' \lambda \rho}{\lambda \rho} \right) \right] + \nu \operatorname{kei} \lambda \rho \right\} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A = & \frac{D_0}{D_0 + kR^2}, \quad \lambda^2 = \frac{l^2}{R} \sqrt{\frac{D_0 + kR^2}{D_1}}, \quad \rho^2 = (x - \xi)^2 + y^2, \\ \operatorname{kei}' \lambda \rho = & \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\rho} \operatorname{kei} \lambda \rho, \quad \operatorname{ker}' \lambda \rho = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\rho} \operatorname{ker} \lambda \rho, \end{aligned}$$

$\operatorname{kei} \rho$, $\operatorname{ker} \rho$ — функции Кельвина.

Используя соотношения (4) и формулы (2), можно определить усилия N_1 , N_2 , моменты M_1 , M_2 , а следовательно, и напряжения в произвольной точке оболочки как функции скачков перемещений $\varepsilon_2(x)$ и углов поворота $\kappa_2(x)$ на линии трещины. Прибавляя к найденным усилиям и моментам соответствующие усилия и моменты в оболочке без трещины и требуя, чтобы суммарные усилия N_2 и моменты M_2 в случае симметричной относительно линии трещины нагрузки удовлетворяли на контуре трещины условиям

$$N_2(x, 0) = N_2^0(x), \quad M_2(x, 0) = M_2^0(x), \quad |x| < 1, \quad (5)$$

получаем интегральные уравнения для определения функций $\varepsilon_2(x)$, $\kappa_2(x)$. Здесь N_2^0 , M_2^0 — усилие и момент, приложенные к берегам трещины.

Так, для определения напряженно-деформированного состояния, вызванного только нагрузкой, приложенной к берегам трещины, для нахождения функций Ψ_k , определяемых через производные от $\varepsilon_2(x)$ и $\kappa_2(x)$, получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) K_{jk}(x - \xi) d\xi = \pi F_j(x), \quad |x| < 1 \quad (j = 1, 2). \quad (6)$$

Здесь

$$\Psi_1 = \frac{d\varepsilon_2(\xi)}{d\xi}, \quad \Psi_2 = \frac{d\kappa_2(\xi)}{d\xi}, \quad F_1 = N_2^0, \quad F_2 = M_2^0,$$

$$\begin{aligned} K_{11}(z) = & -\frac{C_1}{2z} + K_{11}^0(z), \quad K_{12}(z) = K_{21}(z) = C_2 \left[(1 - \nu) \left(\frac{2}{\lambda^2 z^3} + \frac{2 \operatorname{ker}' \lambda z}{\lambda z^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{kei} \lambda z}{z} - \lambda \operatorname{kei} \lambda z \right) \right], \quad K_{22}(z) = -\frac{aC_3}{2z} + K_{22}^0(z), \quad K_{11}^0(z) = C_1 \left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda z}{\lambda z^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\ker \lambda z}{z} + \lambda \ker' \lambda z + \frac{1}{2z} \Big), \\
K_{22}^0(z) = C_3 & \left[- (1 - \nu)^2 \left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda z}{\lambda z^2} - \frac{\ker \lambda z}{z} + \lambda \ker' \lambda z \right) + 2 (1 - \nu) \times \right. \\
& \times \lambda \ker' \lambda z + \lambda^2 \int_0^z \operatorname{kei} \lambda t dt + \frac{a}{2z} \Big], \quad C_1 = \frac{AD_0}{2}, \quad C_2 = \frac{A}{2} \sqrt{D_1 (D_0 + kR^2)}, \\
& C_3 = \frac{D_1}{2}, \quad z = x - \xi, \quad a = 3 - 2\nu - \nu^2.
\end{aligned}$$

Функции K_{11}^0 , K_{22}^0 , K_{12} непрерывны для всего множества действительных значений x и ξ .

Представляя ядра интегральных уравнений (6) двойными рядами по степеням λ и $\ln \lambda$, решение этих уравнений при малых λ ищем в виде [1, 3]

$$\Psi_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn}^k(x) \lambda^m \ln^n \lambda. \quad (7)$$

Подставив разложение (7) в уравнения (6) и приравняв выражения при одинаковых степенях λ и $\ln \lambda$, получим соотношения для определения функций $\psi_{mn}^k(x)$. В случае, когда к берегам трещины приложены равномерно распределенные по ее длине усилие N_0 и момент M_0 , определение функций $\psi_{mn}^k(x)$ сводится к вычислению интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi^n \ln(x - \xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \begin{cases} f_{1n}(x), & n \text{ — четное,} \\ f_{2n}(x), & n \text{ — нечетное,} \end{cases} \quad n > 0 \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
f_{1m} &= - \frac{x^n}{n} - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \frac{x^{n-2k}}{n-2k} - \frac{(n-1)!!}{n!!} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right), \\
f_{2n} &= - \frac{x^n}{n} - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \frac{x^{n-2k}}{n-2k}.
\end{aligned}$$

Так, например, для первых членов $\psi_{mn}^k(x)$ разложения (7) получим

$$\psi_{mn}^k(x) = \sum_{j=0}^3 \psi_{mn}^{k,2j+1} \frac{x^{2j+1}}{\sqrt{1-x^2}} \quad (m \leq 6, n \leq 3). \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\psi_{00}^{1,1} &= \frac{2\pi^2 N_0}{C_1}, \quad \psi_{00}^{2,1} = \frac{2\pi^2 M_0}{aC_3}, \quad \psi_{20}^{1,3} = - \frac{bB_1}{4} \psi_{00}^{2,1}, \\
\psi_{20}^{1,1} &= 0,39275B_1 \psi_{00}^{2,1} + 0,294 \psi_{00}^{1,1}, \quad \psi_{20}^{2,3} = - \frac{bB_2}{4a} \psi_{00}^{1,1}, \\
\psi_{20}^{2,1} &= a^{-1} (0,39275B_2 \psi_{00}^{1,1} + 0,5 \psi_{00}^{2,1}), \quad \psi_{21}^{1,1} = - bB_1 \psi_{00}^{2,1}, \\
\psi_{21}^{2,1} &= - a^{-1} bB_2 \psi_{00}^{1,1}, \quad \psi_{40}^{1,5} = 0,26 \cdot 10^{-1} \psi_{00}^{1,1} - \frac{1}{6} bB_1 \psi_{20}^{2,3}, \\
\psi_{40}^{1,3} &= 0,868767 \cdot 10^{-1} \psi_{00}^{1,1} - B_1 [0,336 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} + b (\psi_{20}^{2,1} + 0,4167 \psi_{20}^{2,3})], \\
\psi_{40}^{1,1} &= \left(0,393 \Phi_2 - \frac{1}{6} b \psi_{20}^{2,3} + 0,84 \cdot 10^{-3} \psi_{00}^{2,1} \right) B_1 - 0,435 \cdot 10^1 \psi_{00}^{1,1} + 0,294 \Phi_1, \\
\psi_{40}^{2,5} &= - a^{-1} \left(0,205 \cdot 10^1 \psi_{00}^{2,1} + \frac{1}{6} bB_2 \psi_{20}^{1,3} \right), \quad \psi_{40}^{2,3} = a^{-1} [0,1974 \cdot 10^1 \psi_{00}^{2,1} +
\end{aligned}$$

$$+ B_2 (0,336 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1} - b\Phi_1)], \psi_{40}^{2,1} = a^{-1} \left[B_2 \left(0,39275\Phi_1 - \frac{1}{6} b\psi_{20}^{1,3} - \right. \right. \\ \left. \left. - 0,84 \cdot 10^{-3} \psi_{00}^{1,1} \right) - 0,5\Phi_2 - 0,5162\psi_{00}^{2,1} \right],$$

$$\psi_{41}^{1,3} = 0,156\psi_{00}^{1,1} - bB_1\psi_{21}^{2,1}, \psi_{41}^{1,1} = 0,294\psi_{21}^{1,1} - 0,39 \cdot 10^{-1} \psi_{00}^{1,1} + \\ + B_1 (0,39275\psi_{21}^{2,1} - b\Phi_2), \psi_{41}^{2,3} = a^{-1} (0,123 \cdot 10^2 \psi_{00}^{2,1} - bB_2\psi_{21}^{1,1}),$$

$$\psi_{41}^{2,1} = [0,3075 \cdot 10^1 \psi_{00}^{2,1} - 0,5\psi_{21}^{2,1} + B_2 (0,39275\psi_{21}^{1,1} - b\Phi_1)] a^{-1},$$

$$\psi_{42}^{1,1} = -bB_1\psi_{21}^{2,1}, \psi_{42}^{2,1} = -a^{-1} bB_2\psi_{21}^{1,1}, \psi_{6,3}^{1,1} = -bB_1\psi_{42}^{2,1},$$

$$\psi_{63}^{2,1} = -a^{-1} bB_2\psi_{42}^{1,1}, \psi_{62}^{1,3} = 0,156\psi_{21}^{1,1} - bB_1\psi_{42}^{2,1},$$

$$\psi_{62}^{1,1} = B_1 (0,39275\psi_{42}^{2,1} - b\Phi_3) + 0,294\psi_{42}^{1,1} - 0,39 \cdot 10^{-1} \psi_{21}^{1,1},$$

$$\psi_{62}^{2,3} = -a^{-1} (0,123 \cdot 10^2 \psi_{21}^{2,1} + bB_2\psi_{42}^{1,1}), \psi_{62}^{2,1} = a^{-1} [0,3075 \cdot 10^1 \psi_{21}^{2,1} -$$

$$- 0,5\psi_{42}^{2,1} + B_2 (0,39275\psi_{42}^{1,1} - b\Phi_4)], \psi_{61}^{2,5} = -a^{-1} \left[0,615 \cdot 10^1 \psi_{21}^{2,1} + \right. \\ \left. + B_2 \left(0,76 \cdot 10^{-3} \psi_{00}^{1,1} + \frac{1}{6} b\psi_{41}^{1,3} \right) \right], \psi_{61}^{2,3} = a^{-1} \{ B_2 [0,336 \cdot 10^{-2} \psi_{21}^{1,1} -$$

$$- 0,76 \cdot 10^{-3} \psi_{00}^{1,1} - 0,5b (\psi_{41}^{1,1} + 0,4167\psi_{41}^{1,3})] - 0,123 \cdot 10^2 \Phi_2 -$$

$$- 0,4964 \cdot 10^1 \psi_{21}^{2,1} \}, \psi_{61}^{2,1} = a^{-1} \{ 0,301 \cdot 10^1 \psi_{21}^{2,1} - 0,5\Phi_3 - 0,1025 (3\psi_{20}^{2,1} +$$

$$+ 2\psi_{20}^{2,3}) + B_2 [0,1728\Phi_4 + 0,57 \cdot 10^{-3} \psi_{00}^{1,1} - b\Phi_5 - 0,84 \cdot 10^{-2} \psi_{21}^{1,1} +$$

$$+ 2b (0,29983\psi_{41}^{1,3} + 0,6931\psi_{41}^{1,1}) \},$$

$$\psi_{61}^{1,5} = 0,26 \cdot 10^{-1} \psi_{21}^{1,1} - B_1 \left(0,3038 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} + \frac{1}{6} b\psi_{41}^{2,3} \right),$$

$$\psi_{61}^{1,3} = B_1 [0,336 \cdot 10^{-2} \psi_{21}^{2,1} - 2b (\psi_{41}^{2,1} + 0,4167\psi_{41}^{2,3}) - 0,3038 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1}] -$$

$$- 0,2679 \cdot 10^1 \psi_{21}^{1,1} + 0,156\Phi_1, \psi_{61}^{1,1} = B_1 [0,1728\Phi_3 + 2b (0,2998\psi_{41}^{2,3} +$$

$$+ 0,6931\psi_{41}^{2,1}) - 0,84 \cdot 10^{-3} \psi_{21}^{2,1} - b\Phi_6 + 0,57 \cdot 10^{-3} \psi_{00}^{2,1} + 0,2468 \cdot 10^{-1} \psi_{21}^{1,1}] +$$

$$+ 0,13 \cdot 10^{-1} (3\psi_{20}^{1,1} + 2\psi_{20}^{1,3}) + 0,294\Phi_4, \psi_{60}^{2,7} = -a^{-1} \left[0,1367\psi_{20}^{2,3} + B_2 \left(\frac{1}{60} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times b\psi_{40}^{1,5} + 0,5067 \cdot 10^{-4} \psi_{00}^{1,1} \right) \right],$$

$$\psi_{60}^{2,5} = a^{-1} \{ 0,55 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} - 0,205 \cdot 10^1 (\psi_{20}^{2,1} + 0,4667\psi_{20}^{2,3}) -$$

$$- B_2 [0,5b (0,333 \dots \psi_{40}^{1,3} + 0,1\psi_{40}^{1,5}) + 0,965 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1}] \},$$

$$\psi_{60}^{2,3} = a^{-1} \{ B_2 [0,336 \cdot 10^{-2} \Phi_1 - 0,46 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1} - b (\psi_{40}^{1,1} + 0,4167\psi_{40}^{1,3} +$$

$$+ 0,325\psi_{40}^{1,5})] + 0,55 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} + 0,8738 \cdot 10^1 \psi_{20}^{2,1} + 0,75581 \cdot 10^1 \psi_{20}^{2,3} \},$$

$$\psi_{60}^{2,1} = a^{-1} \{ 0,406 \cdot 10^1 \psi_{20}^{2,1} - 0,5\Phi_6 + 0,4394 \cdot 10^1 \psi_{20}^{2,3} - 0,41 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} +$$

$$+ B_2 [0,406 \cdot 10^1 \psi_{20}^{2,1} - 0,28 \cdot 10^{-4} (3\psi_{20}^{1,1} + 2\psi_{20}^{1,3}) + 0,6989 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1} +$$

$$+ b (0,693\psi_{40}^{1,1} - 0,6796 \cdot 10^1 \psi_{40}^{1,3} + 0,683\psi_{40}^{1,5}) \}, \psi_{60}^{1,7} = 0,173 \cdot 10^{-2} \psi_{20}^{1,3} -$$

$$- B_1 \left(\frac{1}{15} b\psi_{40}^{2,5} + 0,5067\psi_{00}^{2,1} \right), \psi_{60}^{1,5} = 0,26 \cdot 10^{-1} (\psi_{20}^{1,1} + 0,4667\psi_{20}^{1,3}) -$$

$$- 0,85 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1} - B_1 \left(\frac{1}{6} b\psi_{40}^{2,3} + \frac{1}{20} b\psi_{40}^{2,5} + 0,965 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} \right),$$

$$\psi_{60}^{1,3} = B_1 (0,336 \cdot 10^{-2} \Phi_2 - b\Phi_4 - 0,845 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1}) - 0,1685\Phi_1 -$$

$$- 0,13 \cdot 10^{-1} (15\psi_{20}^{1,1} + 0,122 \cdot 10^2 \psi_{20}^{1,3}) - 0,85 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1},$$

$$\begin{aligned} \psi_{60}^{1,1} = & B_1 [0,1728\Phi_6 + b(0,6931\psi_{40}^{2,1} + 0,6\psi_{40}^{2,3} + 0,683\psi_{40}^{2,5}) - \\ & - 0,1941 \cdot 10^{-4} (2\psi_{20}^{2,3} + 3\psi_{20}^{2,1})] + 0,972 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{2,1} + 0,294\Phi_5 + \\ & + 0,64 \cdot 10^{-2} \psi_{00}^{1,1} + 0,1266\psi_{20}^{1,1} + 0,45 \cdot 10^{-3} \psi_{20}^{1,3}, \end{aligned}$$

$\psi_{mn}^k = 0$ при m нечетном, а также при всех $n > E\left(\frac{m}{2}\right)$.

Здесь

$$b = \frac{1+\nu}{4}, \quad B_1 = \frac{C_2}{C_1}; \quad B_2 = \frac{C_3}{C_1}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \nu = 0,27,$$

$$\Phi_1 = \psi_{20}^{1,1} + 0,75\psi_{20}^{1,3}, \quad \Phi_2 = \psi_{20}^{2,1} + 0,75\psi_{20}^{2,3}, \quad \Phi_3 = \psi_{41}^{2,1} + 0,75\psi_{41}^{2,3},$$

$$\Phi_4 = \psi_{41}^{1,1} + 0,75\psi_{41}^{1,3}, \quad \Phi_5 = \psi_{40}^{1,1} + 0,75\psi_{40}^{1,3} + 0,625\psi_{40}^{1,5}, \quad \Phi_6 = \psi_{40}^{2,1} + 0,75\psi_{40}^{2,3} + \\ + 0,625\psi_{40}^{2,5}.$$

Определив функции $\psi_k(x)$ и используя соотношения (4) и формулы (2), выражения для перемещений ω , усилий N_1, N_2 и моментов M_1, M_2 вне контура трещины запишем так:

$$\omega(x, y) = N_0\omega_0(x, y) + M_0\omega_1(x, y),$$

$$N_i(x, y) = N_0\Phi_i^0(x, y) + M_0\Phi_i^*(x, y), \quad (10)$$

$$M_i(x, y) = N_0\Omega_i^0(x, y) + M_0\Omega_i^*(x, y).$$

Из-за громоздкости аналитические выражения этих формул не приводятся.

Для определения коэффициентов интенсивности [3]

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} N_2, \quad k_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} M_2, \quad (11)$$

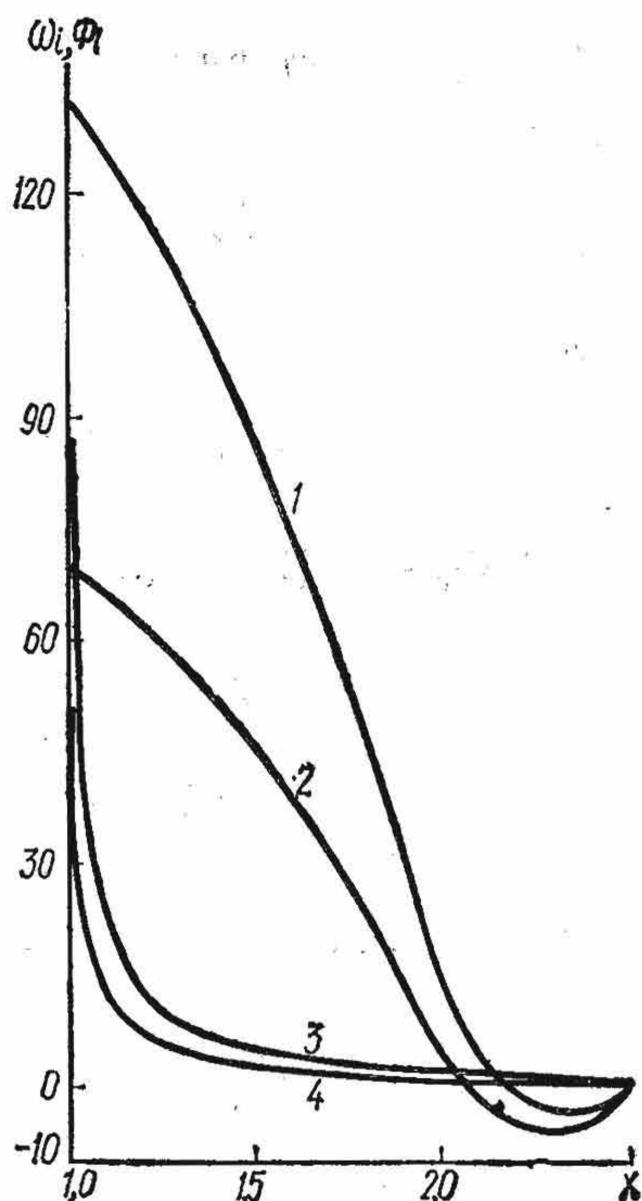
где r — расстояние вдоль линии трещины от ее вершины, получим формулы

$$k_i = -\frac{\sqrt{l}}{2} a_i C_i \sum_{m=0}^6 \sum_{n=0}^3 \Phi_{mn}^{(i)} \lambda^m \ln^n \lambda \quad (i = 1, 3). \quad (12)$$

Здесь

$$\Phi_{mn}^{(1)} = \sum_{j=0}^3 \psi_{mn}^{1,2j+1}, \quad \Phi_{mn}^{(3)} = \sum_{j=0}^3 \psi_{mn}^{3,2j+1}, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = a.$$

На рисунке кривыми 1—4 соответственно обозначены графики функций $\omega_0(x, 0) \cdot 10^3 \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$, $\omega_1(x, 0) \cdot 10^1 \frac{\text{см}}{\text{кг}}$, $\Phi_2^0(x, 0)$, $\Phi_2^*(x, 0) \cdot 10^7 \frac{1}{\text{см}}$. Числовые расчеты проведены при следующих значениях параметров: $R = 0,6384 \times 10^9 \text{ см}$, $l = 0,25 \cdot 10^8 \text{ см}$, $h = 0,5 \cdot 10^7 \text{ см}$, $\nu = 0,27$, $E = 0,71428 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$, $k = 0$, $\lambda = 0,571$. Приведенные графики при заданных значениях N_0, M_0 позволяют вычислить прогибы ω и усилия N_2 на линии трещины ($1 < x \leq 2$).



ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. — МТТ, 1967, 4.
2. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николышин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами. — В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.

3. Ярема С. Я., Саврук М. П. Влияние кривизны на напряженное состояние оболочки с трещиной.— Прикладная механика, 1970, 6, 11.
 4. Turcotte D. L. Membrane tectonics.— Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1974, 36, 1.

Львовский филиал математической физики
 Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
 в сентябре 1974 г.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Я. И. Бурак, Б. И. Колодий, В. Ф. Кондрат

Пусть электропроводное неферромагнитное изотропное упругое тело, ограниченное поверхностью (S), помещено в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 и контактирует с внешней средой, которая принимается в приближении вакуума. На границе тела задано силовое нагружение $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \exp(i\omega t)$, где ω — циклическая частота.

Механо-электромагнитные процессы в теле в пренебрежении токами смещения описываются системой уравнений магнитоупругости [2], которую представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= \beta^2 \Delta \vec{u} + (1 - \beta^2) \text{grad div } \vec{u} + s^2 [\text{rot } \vec{b}, \vec{r}_0] + \\ &+ \Phi_0 \frac{s^2}{4} \left\{ (1 - i) ([\text{rot } \vec{b}, \vec{b}] + [\text{rot } \vec{b}^*, \vec{b}^*]) + (1 + i) ([\text{rot } \vec{b}, \vec{b}^*] + \right. \\ &\quad \left. + [\text{rot } \vec{b}^*, \vec{b}]) \right\}, \\ \Delta \vec{b} - \kappa^2 \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \kappa^2 \text{rot} \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{r}_0 \right] + \\ &+ \Phi_0 \frac{\kappa^2}{4} \text{rot} \left\{ (1 - i) \left(\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{b} \right] + \left[\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t}, \vec{b}^* \right] \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + i) \left(\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{b}^* \right] + \left[\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t}, \vec{b} \right] \right) \right\} = 0, \\ \vec{E} &= \text{rot } \vec{b} - \kappa^2 \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{r}_0 \right] - \Phi_0 \frac{\kappa^2}{4} \left\{ (1 - i) \left(\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{b} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t}, \vec{b}^* \right] \right) + (1 + i) \left(\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{b}^* \right] + \left[\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t}, \vec{b} \right] \right) \right\}, \\ \text{rot } \vec{E}^{(0)} &= -\kappa^2 \frac{\partial \vec{b}^{(0)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t} = \xi^2 \text{rot } \vec{b}^{(0)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{E} = \text{div } \vec{b} = \text{div } \vec{E}^{(0)} = \text{div } \vec{b}^{(0)} = 0.$$

Граничные и начальные условия будут такими:

$$\sigma_{kj} n_j = \frac{F_k}{F_0} e^{it}, \quad (2)$$

$$\vec{E}_\tau = \vec{E}_\tau^{(0)}, \quad \vec{b}_\tau = \vec{b}_\tau^{(0)} \quad \text{на поверхности } (S),$$

$$\left(\vec{u}, \vec{E}, \vec{b}, \vec{E}^{(0)}, \vec{b}^{(0)}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{b}^{(0)}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$