К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКАХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ НАГРЕВЕ

Ю. М. Коляно, М. М. Семерак, В. С. Басараба

Рассмотрим пластинку с круговым включением радиуса R. Через боковую поверхность системы $z = +\delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой, температура которой есть функцией $t_c(\tau)$. Поверхность $z = -\delta$ теплоизолирована. Рассмотрим сначала включение как тонкую пластинку. Для определения нестационарного температурного поля в нем имеем уравнения теплопроводности и краевые условия [2]:

$$\Lambda_0 \Delta T_0 - \alpha_0 (T_0 + T_0^*) - C_0 \frac{\partial T_0}{\partial \tau} = -\alpha_0 t_c; \tag{1}$$

$$\Lambda_0 \Delta T_0^* - 3\left[\alpha_0 (T_0 + T_0^*) + \frac{4}{r_0} T_0^*\right] - C_0 \frac{\partial T_0^*}{\partial \tau} = -3\alpha_0 t_c;$$

$$T = T_0, \ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial r}, \ T^* = T_0^*, \ \lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} = \lambda_0 \frac{\partial T_0^*}{\partial r} \ \text{при } r = R; \tag{2}$$

$$T_0 |_{\tau=0} = 0, \quad T_0^* |_{\tau=0} = 0, \tag{3}$$

где λ_0, λ — коэффициенты теплопроводности включения и пластинки, $\Lambda_0 = 2\lambda_0\delta$, $C_0 = 2C_v^0\delta$, α_0 — коэффициент теплоотдачи с поверхности включения, C_v^0 — его объемная теплоемкость, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$.

Решения уравнений (1) с учетом первого и третьего условий (2) записываются в виде

$$T_0 = -A_1\mu_2 I_0(p_1 r) + A_2\mu_1 I_0(p_2 r) + B,$$
$$T_0^* = A_1 I_0(p_1 r) + A_2 I_0(p_2 r) + C, \tag{4}$$

где

$$A_i = \frac{1}{\mu I_0(p_i R)}\left(T|_{r=R} + \mu_i T^*|_{r=R} - \frac{Q_i}{p_i^2}\right), \quad \mu = \mu_1 - \mu_2,$$

$$B = \frac{1}{\mu}\left(\mu_1 \frac{Q_2}{p_2^2} - \mu_1 \frac{Q_1}{p_1^2}\right), \ C = \frac{1}{\mu}\left(\frac{Q_1}{p_1^2} - \frac{Q_2}{p_2^2}\right), \ p_i^2 = \frac{1}{\Lambda_0}\left(C_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + \varkappa_2^0\right),$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{3\alpha_0}\left(\frac{6}{r_0} + \alpha_0 \pm \sqrt{\left(\frac{6}{r_0} + \alpha_0\right)^2 + 3\alpha_0^2}\right), \ \varkappa_i^0 = \alpha_0(1 + 3\mu_i),$$

$$Q_i = \frac{\alpha_0}{\Lambda_0}(1 + 3\mu_i) t_c, \quad i = 1, 2.$$

Подставив (4) во второе и четвертое условия (2), получим на краю $r = R$ такие условия теплообмена:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\lambda_0}{\mu}\left[p_1 \frac{I_1(p_1 R)}{I_0(p_1 R)} \mu_2 \left(T + \mu_1 T^* - \frac{Q_1}{p_1^2}\right) - \right.$$
$$\left. - p_2 \frac{I_1(p_2 R)}{I_0(p_2 R)} \mu_1 \left(T + \mu_2 T^* - \frac{Q_2}{p_2^2}\right)\right],$$
$$\lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} = \frac{\lambda_0}{\mu}\left[p_1 \frac{I_1(p_1 R)}{I_0(p_1 R)}\left(T + \mu_1 T^* - \frac{Q_1}{p_1^2}\right) - \right. \tag{5}$$
$$\left. - p_2 \frac{I_1(p_2 R)}{I_0(p_2 R)}\left(T + \mu_2 T^* - \frac{Q_2}{p_2^2}\right)\right] \ \text{при} \quad r = R,$$

где $I_\nu(\zeta)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $\nu = 0,\ 1$.

Представляя операторы $p_i \dfrac{I_1(p_i R)}{I_0(p_i R)}$ в виде ряда и считая, что диаметр включения одного порядка с его толщиной, ограничимся первыми членами разложений операторов. В результате на поверхности сопряжения пластинки и включения находим приближенные условия теплообмена

$$\Lambda \frac{\partial T}{\partial r} = A_0 (T + T^* - t_c) + C_0 \frac{\partial T}{\partial \tau},$$
$$\Lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} = 3A_0 \left[T + \left(\frac{1}{3} + \mu_1 + \mu_2 \right) T^* - t_c \right] + C_0 \frac{\partial T^*}{\partial \tau} \quad \text{при } r = R. \tag{6}$$

Здесь $\Lambda = S\lambda$ — приведенная теплопроводность пластинки на поверхности контакта, $S = 4\pi R\delta$ — площадь поверхности контакта, $A_0 = S_0\alpha_0$ — приведенная теплоотдача с поверхности включения $S_0 = \pi R^2$, $C_0 = C_v^0 V_0$ — приведенная теплоемкость включения, $V_0 = 2S_0\delta$ — объем включения.

Сформулируем термоупругие условия на поверхности сопряжения пластинки и включения. Для определения напряженно-деформированного состояния в включении получаем соотношения для усилий, моментов и перерезывающих сил, уравнения для радиального перемещения u и прогиба w и краевые условия [1]:

$$N_r^0 = \frac{g_0}{1 - \nu_0^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu_0 \frac{u_0}{r} - \alpha_t^0 (1 + \nu_0) T_0 \right],$$
$$N_\varphi^0 = \frac{g_0}{1 - \nu_0^2} \left[\nu_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} - \alpha_t^0 (1 + \nu_0) T_0 \right], \tag{7}$$

$$M_r^0 = -D_0 \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \alpha_t^0 (1 + \nu_0) \frac{T_0^*}{\delta} \right],$$
$$M_\varphi^0 = -D_0 \left[\nu_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \alpha_t^0 (1 + \nu_0) \frac{T_0^*}{\delta} \right], \tag{8}$$

$$Q_r^0 = -D_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[\Delta w_0 + \alpha_t^0 (1 + \nu_0) \frac{T_0^*}{\delta} \right], \quad Q_\varphi^0 = 0, \tag{9}$$

$$\Delta u_0 - \left(\frac{1}{r^2} + p_c^2 \right) u_0 = \alpha_t^0 (1 + \nu_0) \frac{\partial T_0}{\partial r}, \tag{10}$$

$$\Delta\Delta w_0 - p_w^4 w_0 = -\alpha_t^0 (1 + \nu_0) \frac{\Delta T_0^*}{\delta}, \tag{11}$$

$$N_r = N_r^0, \quad u = u_0 \quad \text{при } r = R, \quad u_0|_{r=0} = 0, \tag{12}$$

$$M_r = M_r^0, \quad Q_r = Q_r^0, \quad w = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w_0}{\partial r} \quad \text{при } r = R, \quad w_0|_{r=0} \neq \infty, \quad M_r^0|_{r=0} \neq \infty, \tag{13}$$

$$u = \dot{u} = w = \dot{w} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \tag{14}$$

где α_t^0 — температурный коэффициент линейного расширения, ν_0 — коэффициент Пуассона, $g_0 = 2E_0\delta$, E_0 — модуль Юнга, $D_0 = \dfrac{2E_0\delta^3}{3(1-\nu_0^2)}$, $c_1^0 = \sqrt{\dfrac{2G}{(1-\nu)\rho_0}}$, ρ_0 — плотность, G — модуль сдвига,

$$p_w^4 = -\varkappa_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad \varkappa_0^2 = \frac{2\rho_0\delta}{D_r}, \quad p_c^2 = \frac{1}{c_1^{(0)2}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Решение уравнений (10), (11) с учетом последних двух условий (12) и четырех условий (13) находим в виде

$$u_0 = \frac{I_1(p_c r)}{I_1(p_c R)} u|_{r=R} + \frac{\beta_0}{\mu}[\mu_2 m_1 - \mu_1 m_2], \tag{15}$$

$$w_0 = \chi(r) w|_{r=R} + \chi_1(R) \frac{d_0^-(p_w, r)}{d_1^+(p_w, R)} w|_{r=R} + \frac{d_0^-(p_w, r)}{p_w d_1^+(p_w, R)} \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=R} +$$

$$+ \frac{\beta_0}{\mu\delta}\left[\frac{\overset{*}{p}_1^2}{\overset{*}{p}_1^4 - p_w^4}\left(b_1 + \frac{q_1 d_0^-(p_w, r)}{p_w d_1^+(p_w, R)}\right) n_1 - \frac{\overset{*}{p}_2^2}{\overset{*}{p}_2^4 - p_w^4}\left(b_2 + \frac{q_2 d_0^-(p_w, r)}{p_w d_1^+(p_w, R)}\right) n_2\right], \tag{16}$$

где

$$m_i = \frac{p_i}{p_i^2 - p_c^2}\left[\frac{I_1(p_c r)}{I_1(p_c R)} \frac{I_1(p_i R)}{I_0(p_i R)} - \frac{I_1(p_i r)}{I_0(p_i R)}\right] n_i,$$

$$n_i = T|_{r=R} + \mu_i T^*|_{r=R} - \frac{Q_i}{p_i^2}, \quad \chi_j(r) = \frac{J_j(p_w r)}{J_0(p_w R)},$$

$$d_j^{\pm}(p_w, r) = \frac{I_j(p_w r)}{I_0(p_w R)} \pm \frac{J_j(p_w r)}{J_0(p_w R)}, \quad j = 0, 1,$$

$$q_i = \overset{*}{p}_i \frac{J_1(\overset{*}{p}_i R)}{J_0(\overset{*}{p}_i R)} - p_w \frac{J_1(p_w R)}{J_0(p_w R)}, \quad b_i = \frac{J_0(\overset{*}{p}_i r)}{J_0(\overset{*}{p}_i R)} - \frac{J_0(p_w r)}{J_0(p_w R)},$$

$$\beta_0 = \alpha_t^{(0)}(1 + \nu_0), \quad \overset{*}{p}_i^2 = -p_i^2, \quad i = 1, 2,$$

$J(\zeta)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu = 0, 1$.

Подставим первое соотношение (7), в котором u_0 определяется соотношением (15), в первое условие (12), а в первые два условия (13) подставим первые соотношения (8), (9), в которые предварительно подставлено (16). В результате получим

$$N_2 = \frac{g_0}{1 - \nu_0^2}\left\{\left[p_c \frac{I_0(p_c R)}{I_1(p_c R)} - \frac{1 - \nu_0}{R}\right] u|_{r=R} + (\mu_2\omega_1 - \mu_1\omega_2) T|_{r=R} +\right.$$

$$\left. + \mu_1\mu_2(\omega_1 - \omega_2) T^*|_{r=R} + \mu_2\left(\frac{\beta_0}{\mu} - \omega_1\right)\frac{Q_1}{p_1^2} - \mu_1\left(\frac{\beta_0}{\mu} - \omega_2\right)\frac{Q_2}{p_2^2}\right\}, \tag{17}$$

$$M_r = -D_0\left\{p_w^2\left[\frac{2}{d_1^+(p_w, R)} \frac{J_1(p_w R)}{J_0(p_w R)} - 1\right] w|_{r=R} +\right.$$

$$+ \left[\frac{2p_w}{d_1^+(p_w R)} - \frac{1 - \nu_0}{R}\right] \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=R} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) T|_{r=R} +$$

$$\left. + \left(\frac{\beta_0}{\delta} + \mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2\right) T^*|_{r=R} - \varepsilon_1 \frac{Q_1}{p_1^2} + \varepsilon_2 \frac{Q_2}{p_2^2}\right\}, \tag{18}$$

$$Q = -D_0\left[p_w^3 \frac{J_1(p_w R)}{J_0(p_w R)}\left(1 + \frac{d_1^-(p_w, R)}{d_1^+(p_w, R)}\right) w|_{r=R} + p_w^2 \frac{d_1^-(p_w, R)}{d_1^+(p_w, R)} \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=R} +\right.$$

$$\left. + (\gamma_1 - \gamma_2) T|_{r=R} + (\mu_1\gamma_1 - \mu_2\gamma_2) T^*|_{r=R} - \frac{\gamma_1}{p_1^2} Q_1 + \frac{\gamma_2}{p_2^2} Q_2\right], \tag{19}$$

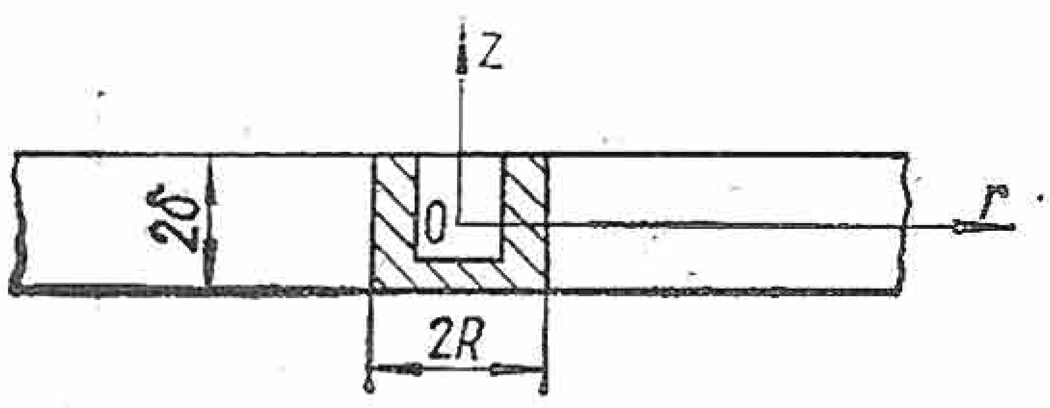
где

$$\omega_i = \frac{\beta_0 p_c^2}{\mu(p_i^2 - p_c^2)}\left(\frac{p_i}{p_c} \frac{I_0(p_c R)}{I_1(p_c R)} \frac{I_1(p_i R)}{I_0(p_i R)} - 1\right),$$

$$\varepsilon_i = \frac{\beta_0}{\delta\mu_0} \frac{\overset{*}{p}_1^2}{\overset{*}{p}_i^2 + p_w^2}\left(\frac{2p_w}{d_1^+(p_w, R)} \frac{q_i}{\overset{*}{p}_i^2 - p_w^2} - 1\right),$$

$$\gamma_i = \frac{\beta_0}{\delta\mu_0}\left\{\frac{p_i^{*2}}{p_i^{*4} - p_w^4}\left[p_i^{*3}\frac{J_1(p_i^* R)}{J_0(p_i^* R)} - p_w^3\frac{J_1(p_w R)}{J_0(p_w R)} + p_w^2 q_i \frac{d_1^-(p_w, R)}{d_1^+(p_w, R)}\right] - \right.$$

$$\left. - p_i^* \frac{J_1(p_i^* R)}{J_0(p_i^* R)}\right\}, \qquad i = 1, 2.$$



Разложив фигурирующие в (17) — (19) операторы в ряды и ограничившись членами, содержащими R не выше второй степени, получим такие приближенные граничные условия на крае $r = R$ пластинки:

$$N_2 = \frac{g_0}{1 - \nu_0}\left(\frac{u}{R} - \alpha_t^{(0)} T\right) + \frac{\Omega_0}{16\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

$$M_2 = -D_0(1 + \nu_0)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\alpha_t^{(0)}}{\delta} T^*\right) + \frac{\Omega_0^*}{8\pi}\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \tag{20}$$

$$Q_2 = \frac{\Omega_0^*}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2},$$

где $\Omega_0 = \rho_0 S$, $\Omega_0^* = \rho_0 V_0$.

Сформулированные граничные термомеханические условия (6), (20) дают возможность определять динамические температурные напряжения в пластинках с круговыми включениями произвольной формы, симметричной относительно вертикальной оси. В частности, они могут быть использованы для изучения температурных напряжений в кинескопах, содержащих включения, представленной на рисунке формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1974 г.

ОБОБЩЕННАЯ ВЗАИМОСВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СФЕРЫ

Ф. В. Семерак, В. М. Бойко

Рассмотрим однородную изотропную упругую сферу радиуса R, находящуюся в ненапряженном и недеформированном состоянии. В начальный момент времени поверхность сферы $r = R$ поддается тепловому или механическому воздействию. При решении задачи используем сферические координаты (r, φ, θ), отнесенные к центру сферы. Предположим, что перемещения можно представить в виде

$$u_r = u(r, \tau), \quad u_\varphi = u_\theta = 0. \tag{1}$$

Для определения нестационарного обобщенного температурного поля в сфере имеем уравнение теплопроводности [3]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\right) - \eta\left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial \tau^2}\right) = 0, \tag{2}$$

где

$$\eta = \frac{\alpha_t E T_0}{\lambda(1 - 2\nu)}, \quad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u,$$