УДК 517.526

В. Р. Гладун

ДЕЯКІ МНОЖИНИ ВІДНОСНОЇ СТІЙКОСТІ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ТА ЗМІННОЮ КІЛЬКІСТЮ ГІЛОК РОЗГАЛУЖЕНЬ

Стаття присвячена вивченню умов, за яких нескінченні гіллясті ланцюгові дроби є стійкими до збурень їх елементів. Встановлено формули відносних похибок підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з комплексними частинними знаменниками та чисельниками, що дорівнюють одиниці. З використанням методики множин елементів і відповідних їм множин значень залишків підхідних дробів побудовано множини відносної стійкості до збурень – кутові множини, а також множини, які на парних поверхах дробу є зовнішністю кругів, а на непарних – напівплощинами. Одержано оцінки відносних похибок підхідних дробів таких гіллястих ланцюгових дробів.

Неперервні дроби та їх узагальнення знайшли застосування в різних галузях математики. За допомогою неперервних дробів розв'язано важливі задачі теорії функцій і диференціальних рівнянь, теорії чисел і обчислювальної математики. У багатьох випадках області збіжності раціональних наближень є ширшими, ніж області збіжності поліноміальних наближень, тому апарат неперервних дробів і їх узагальнень ефективно використовується у теорії функцій для наближення спеціальних функцій, зокрема, гіпергеометричних функцій, для побудови аналітичного продовження функцій, заданих у вигляді рядів [2, 7, 8, 14]. Окрім того, неперервні дроби мають властивість ненакопичення або обмеженого накопичення похибок, що виникають в процесі їх обчислень [7]. Ця властивість є причиною перспективності подальших застосувань неперервних дробів в обчислювальній математиці [16, 17].

Стійкість алгоритмів обчислення неперервних дробів досліджували G. Blanch [11], W. Gautschi [15], N. Macon, M. Baskervill [18], W. B. Jones, W. J. Thron [7], Cuyt A., van Der Cruyssen P. [13]. Аналіз похибок, що виникали при обчисленні підхідних дробів неперервних дробів, показав, що обернений рекурентний алгоритм є більш стійким порівняно з прямим рекурентним алгоритмом. W. B. Jones, W. J. Thron отримали у явному вигляді оцінки похибок, що виникають при обчисленні підхідних дробів за оберненим рекурентним алгоритмом, і вказали на залежність цих похибок від елементів неперервного дробу [7, 14]. Питання стійкості розвинень спеціальних функцій у неперервні дроби вивчалось у роботах [10, 12].

При дослідженні стійкості багатовимірного узагальнення неперервних дробів – гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), як правило, враховувались похибки збурення елементів дробу. Ця задача отримала назву *дослідження стійкості до збурень*.

Основні ознаки збіжності та стійкості до збурень ГЛД

$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \right)^{-1} \tag{1}$$

з додатними компонентами наведено в монографії [2]. Зокрема, Д. І. Боднаром встановлено, що область $G = (0, +\infty)$ є областю відносної стійкості до збурень ГЛД (1). Цей результат повністю розв'язує задачу дослідження стійкості до збурень ГЛД з додатними частинними знаменниками та чисельниками, що дорівнюють одиниці. Питання про стійкість до збурень ГЛД (1) в усій комплексній площині на сьогодні залишається відкритим.

Використовуючи формули відносних похибок підхідних дробів, Д. І. Боднар і М. О. Недашковський одержали оцінки цих похибок ГЛД з додатними елементами, а також комплексними елементами, що задовольняють умови Ворпіцького чи Слешинського − Прінґсгейма [2, 9]. Із одержаних оцінок, як і у випадку неперервних дробів, випливає залежність похибки підхідного дробу від елементів ГЛД. У роботах [4, 5] побудовано та досліджено множини відносної стійкості до збурень, зокрема, багатовимірні множини, ГЛД загального та спеціального виглядів з комплексними елементами і деяких підпослідовностей їх підхідних дробів. Абсолютна стійкість до збурень ГЛД з дійсними елементами розглядалась у роботах [1, 3, 6]. Подальше вивчення питання відносної стійкості до збурень ГЛД з комплексними елементами та змінною кількістю гілок розгалужень є предметом досліджень пропонованої роботи.

Основні поняття та означення. Розглянемо ГЛД зі змінною кількістю гілок розгалужень

$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{2}$$

де $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ − мультиіндекс, $N_{i(k)} \in \mathbb{N}$ − кількість гілок розгалужень. Позначимо множини мультиіндексів

$$I_0 = \{0\},$$

$$I_k = \{i(k):\ i_p = 1, 2, \ldots, N_{i(p-1)},\ p = 1, 2, \ldots, k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Скінченні ГЛД $f^{(0)} = \dfrac{1}{b_0}$, $f^{(s)} = \left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{s} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \dfrac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}$, $s = 1, 2, \ldots$, називають s-ми підхідними дробами ГЛД (2). Величини, що визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(s)} = b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{1}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}, \quad i(p) \in I_p, \quad p = s-1, s-2, \ldots, 0, \tag{3}$$

називають залишками s-го підхідного дробу ГЛД (2). При цьому $Q_{i(s)}^{(s)} = b_{i(s)}$, $i(s) \in I_s$.

Нехай $\widehat{b}_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, − збурені значення елементів $b_{i(k)}$ ГЛД (2). Тоді ГЛД

$$\left(\widehat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{1}{\widehat{b}_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{4}$$

називають збуреним гіллястим ланцюговим дробом до дробу (2).

Нехай $\{G_{i(k)}\}$, $G_{i(k)} \subset \mathbb{C}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, − послідовність множин елементів ГЛД (2) і збуреного до нього ГЛД (4):

$$b_{i(k)} \in G_{i(k)}, \qquad \widehat{b}_{i(k)} \in G_{i(k)}, \qquad i(k) \in I_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Послідовність $\{V_{i(k)}\}$, $\varnothing \neq V_{i(k)} \subset \mathbb{C}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, називають послідовністю множин значень залишків підхідних дробів ГЛД (2), що відповідає послідовності множин елементів $\{G_{i(k)}\}$, якщо

$$b_{i(k)} \in V_{i(k)}$$

для кожного $b_{i(k)} \in G_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і

$$b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{1}{v_{i(k+1)}} \in V_{i(k)} \tag{5}$$

для кожного $v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$ і кожного $b_{i(k)} \in G_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Із наведеного означення випливає, що $Q_{i(p)}^{(s)} \in V_{i(p)}$, $i(p) \in I_p$, $p = 0,\dots,s$, $s = 0,1,2,\dots$.

Послідовність множин елементів $\{G_{i(k)}\}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, називають послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД (2), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для кожного $b_{i(k)} \in G_{i(k)}$, $b_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, і кожного $\widehat{b}_{i(k)} \in G_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, такого, що $\left|\dfrac{\widehat{b}_{i(k)} - b_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right| < \delta$, виконуються нерівності $\left|\dfrac{\widehat{f}^{(s)} - f^{(s)}}{f^{(s)}}\right| < \varepsilon$, $s = 0,1,2,\dots$, де $f^{(s)}$ і $\widehat{f}^{(s)}$ – підхідні дроби ГЛД (2) і (4) відповідно.

Формули відносних похибок підхідних дробів. Припустимо, що

$$b_{i(k)} \neq 0, \quad \widehat{b}_{i(k)} \neq 0, \quad i(k) \in I_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{6}$$

$$Q_{i(p)}^{(s)} \neq 0, \quad \widehat{Q}_{i(p)}^{(s)} \neq 0, \quad i(p) \in I_p, \quad p = 0,\dots,s, \quad p = 0,\dots,s, \tag{7}$$

де $Q_{i(p)}^{(s)}$, $\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}$ – залишки підхідних дробів $f^{(s)}$, $\widehat{f}^{(s)}$ відповідно.

Позначимо через $\beta_{i(k)}$, $\varepsilon^{(s)}$, $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ відносні похибки елементів $b_{i(k)}$ ГЛД (2), підхідного дробу $f^{(s)}$ і залишків $Q_{i(p)}^{(s)}$ підхідного дробу $f^{(s)}$ відповідно:

$$\widehat{b}_{i(k)} = b_{i(k)}(1 + \beta_{i(k)}), \quad i(k) \in I_k, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

$$\widehat{f}^{(s)} = f^{(s)}(1 + \varepsilon^{(s)}), \quad s = 0,1,2,\dots,$$

$$\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)} = Q_{i(p)}^{(s)}(1 + \varepsilon_{i(p)}^{(s)}), \quad i(p) \in I_p, \quad p = 0,\dots,s, \quad s = 0,1,2,\dots.$$

Розглянемо величини $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$, $i(p) \in I_p$, задані співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(s)} = \widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}(1 + \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}), \quad i(p) \in I_p, \quad p = 0,\dots,s, \quad s = 0,1,2,\dots.$$

Очевидно, що $(1 + \varepsilon_{i(p)}^{(s)})(1 + \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}) = 1$, $i(p) \in I_p$, $p = 0,\dots,s$, $s = 0,1,2,\dots$.

У припущеннях (6), (7) покажемо, що для відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ справджуються такі рекурентні формули:

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)} = \beta_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} g_{i(p+1)}^{(s)}\big(\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)} - \beta_{i(p)}\big), \tag{8}$$

$$\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)} = -\frac{\beta_{i(p)}}{1 + \beta_{i(p)}} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \widehat{g}_{i(p+1)}^{(s)}\left(\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)} + \frac{\beta_{i(p)}}{1 + \beta_{i(p)}}\right),$$

$$i(p) \in I_p, \quad p = 0,\dots,s-1, \tag{9}$$

де

$$\varepsilon_{i(s)}^{(s)} = \beta_{i(s)}, \quad \widehat{\varepsilon}_{i(s)}^{(s)} = -\frac{\beta_{i(s)}}{1 + \beta_{i(s)}}, \quad i(s) \in I_s, \tag{10}$$

$$g_{i(p)}^{(s)} = \big(Q_{i(p-1)}^{(s)} Q_{i(p)}^{(s)}\big)^{-1}, \quad i(p) \in I_p, \quad p = 1,\dots,s,$$

$$\widehat{g}_{i(p)}^{(s)} = \big(\widehat{Q}_{i(p-1)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}\big)^{-1}, \quad i(p) \in I_p, \quad p = 1,\dots,s. \tag{11}$$

Формули (10) очевидні. При $0 \le p \le s-1$ маємо

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)} = \frac{\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)} - Q_{i(p)}^{(s)}}{Q_{i(p)}^{(s)}} = \frac{1}{Q_{i(p)}^{(s)}}\Bigg(b_{i(p)}(1+\beta_{i(p)}) +$$

$$+ \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{1}{Q_{i(p+1)}^{(s)}\big(1+\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\big)}\Bigg) - 1 = \frac{b_{i(p)}}{Q_{i(p)}^{(s)}}(1+\beta_{i(p)}) +$$

$$+ \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}}{Q_{i(p)}^{(s)}Q_{i(p+1)}^{(s)}} - 1 = \Bigg(1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} g_{i(p+1)}^{(s)}\Bigg)(1+\beta_{i(p)}) +$$

$$+ \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} g_{i(p+1)}^{(s)}\big(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\big) - 1 =$$

$$= \beta_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} g_{i(p+1)}^{(s)}\big(\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)} - \beta_{i(p)}\big).$$

Аналогічно отримуємо рекурентні формули (9) для відносних похибок $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$.

Почергово використовуючи співвідношення (8), (9), отримуємо формули для відносних похибок $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$:

$$\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)} = \beta'_{i(p)} + \sum_{k=1}^{s-p} \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \sum_{i_{p+2}=1}^{N_{i(p+1)}} \ldots \sum_{i_{p+k}=1}^{N_{i(p+k-1)}} \big(\beta'_{i(p+k)} - \beta'_{i(p+k-1)}\big) \prod_{m=1}^{k} q_{i(p+m)}^{(s)},$$

$$i(p) \in I_p, \qquad p = 0, \ldots, s, \tag{12}$$

де

$$q_{i(p+k)}^{(s)} = \begin{cases} g_{i(p+k)}^{(s)}, & k = 2m, \\ \widehat{g}_{i(p+k)}^{(s)}, & k = 2m+1, \end{cases} \quad \beta'_{i(p+k)} = \begin{cases} \beta_{i(p+k)}, & k = 2m+1, \\ -\dfrac{\beta_{i(p+k)}}{1+\beta_{i(p+k)}}, & k = 2m, \end{cases}$$

$$i(p+k) \in I_{p+k}, \qquad k = 0, \ldots, s-p. \tag{13}$$

Оскільки $\varepsilon^{(s)} = \widehat{\varepsilon}_0^{(s)}$, то, поклавши в (12) $p = 0$, отримуємо формулу для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (2):

$$\varepsilon^{(s)} = \beta'_0 + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \ldots \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \big(\beta'_{i(k)} - \beta'_{i(k-1)}\big) \prod_{m=1}^{k} q_{i(m)}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

де величини $q_{i(k)}^{(s)}$ і $\beta'_{i(k)}$ визначаються згідно з (13) при $p = 0$.

Множини відносної стійкості до збурень.

Теорема 1. *Нехай існує стала* β, $0 < \beta < 1$, *така, що*

$$\left|\beta_{i(k)}\right| \le \beta, \qquad i(k) \in I_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Сукупність множин

$$G_{i(k)} = G_{i(k)}^{(1)} \cap G_{i(k)}^{(2)}, \qquad i(k) \in I_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де

$$G_{i(k)}^{(1)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \le \frac{\pi}{4} \right\}, \qquad G_{i(k)}^{(2)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \ge \rho_{i(k)} \right\},$$

$\rho_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, − *задані дійсні додатні сталі, є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД* (2), *якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{m=0}^{k} \eta_m, \tag{17}$$

де

$$\eta_k = \max_{i(k)\in I_k}\left\{\rho_{i(k)}^{-1}\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}^{-1}\right\},\qquad k=0,1,2,\ldots. \tag{18}$$

Для відносних похибок підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta}\left(1+(2-\beta)\sum_{k=0}^{s-1}\prod_{m=0}^{k}\eta_m\right),\qquad s=0,1,2,\ldots. \tag{19}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо послідовність множин $\{V_{i(k)}\}$, де $V_{i(k)} = G_{i(k)}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, а множини $G_{i(k)}$ визначаються згідно з (16). Тоді $b_{i(k)}\in V_{i(k)}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$.

Функція $w=1/z$ відображає $V_{i(k)}$ у множину $\tilde{G}_{i(k)} = G_{i(k)}^{(1)}\bigcap \tilde{G}_{i(k)}^{(2)}$, де $\tilde{G}_{i(k)}^{(2)} = \{z\in\mathbb{C} : |z|\le \rho_{i(k)}^{-1}\}$. Умова (5) виконується, якщо $\left|\arg b_{i(k-1)}\right|\le \frac{\pi}{4}$ і $\min\left\{\left|b_{i(k-1)}+z\right|, z\in \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\tilde{G}_{i(k)}\right\}\ge \rho_{i(k-1)}$.

Нехай

$$b_{i(k-1)} = \left|b_{i(k-1)}\right|\exp\left(i\varphi_{i(k-1)}\right),$$

$$z=|z|\exp(i\varphi),\qquad z\in\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\tilde{G}_{i(k)} = \left\{z\in\mathbb{C} : |z|\le \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\rho_{i(k)}^{-1}, |\arg z|\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Оскільки

$$\left|b_{i(k-1)}+z\right| = \sqrt{\left|b_{i(k-1)}\right|^2+|z|^2+2\left|b_{i(k-1)}\right||z|\cos\left(\varphi_{i(k-1)}-\varphi\right)} \ge$$

$$\ge \left|b_{i(k-1)}\right| \ge \rho_{i(k-1)},$$

то послідовність множин елементів $\{G_{i(k)}\}$ є послідовністю множин значень залишків підхідних дробів ГЛД (2).

Із формули (14) випливає оцінка для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (2):

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta}\left(1+(2-\beta)\sum_{k=1}^{s}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\prod_{m=1}^{k}\left|q_{i(m)}^{(s)}\right|\right).$$

Оскільки послідовність множин елементів $\{G_{i(k)}\}$ є послідовністю множин значень залишків підхідних дробів ГЛД (2) і збуреного до нього ГЛД (4), то для величини $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\left|q_{i(k)}^{(s)}\right|$, $k=1,\ldots,s$, справджуються оцінки:

$$\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|q_{i(2m)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|g_{i(2m)}^{(s)}\right| = \left|Q_{i(2m-1)}^{(s)}\right|^{-1}\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|Q_{i(2m)}^{(s)}\right|^{-1} \le$$

$$\le \rho_{i(2m-1)}^{-1}\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\rho_{i(2m)}^{-1} \le$$

$$\le \max_{i(2m-1)\in I_{2m-1}}\left\{\rho_{i(2m-1)}^{-1}\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\rho_{i(2m)}^{-1}\right\} = \eta_{2m-1},$$

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}} \left| q_{i(2m+1)}^{(s)} \right| = \sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}} \left| \widehat{g}_{i(2m+1)}^{(s)} \right| = \left| \widehat{Q}_{i(2m)}^{(s)} \right|^{-1} \sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}} \left| \widehat{Q}_{i(2m+1)}^{(s)} \right|^{-1} \le$$

$$\le \rho_{i(2m)}^{-1} \sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}} \rho_{i(2m+1)}^{-1} \le$$

$$\le \max_{i(2m)\in I_{2m}} \left\{ \rho_{i(2m)}^{-1} \sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}} \rho_{i(2m+1)}^{-1} \right\} = \eta_{2m} .$$

Тоді для відносної похибки $\varepsilon^{(s)}$ s-го підхідного дробу ГЛД (2) отримуємо оцінку (19).

Якщо збігається ряд (17), то існує додатна стала M така, що $\left|\varepsilon^{(s)}\right| \le \le \dfrac{\beta}{1-\beta}(1+(2-\beta)M)$, $s = 0,1,2,\dots$. Неважко показати, що при

$$\left|\beta_{i(k)}\right| \le \beta < \frac{1+\varepsilon+2M-\sqrt{(1+\varepsilon)^2+4M(M+1)}}{2M}, \quad i(k)\in I_k, \ k = 0,1,2,\dots,$$

де ε – довільна додатна стала, для відносних похибок підхідних дробів ГЛД (2) справджуються нерівності $\left|\varepsilon^{(s)}\right| < \varepsilon$, $s = 0,1,2,\dots$, що доводить виконання умов означення множин відносної стійкості до збурень ГЛД (2). ♦

Теорема 2. *Нехай відносні похибки ГЛД* (2) *задовольняють умови* (15). *Сукупність множин*

$$G_{i(k)}(\varphi) = G_{i(k)}^{(1)}(\varphi) \cap G_{i(k)}^{(2)}, \qquad i(k)\in I_k, \qquad k = 0,1,2,\dots, \tag{20}$$

де

$$G_{i(k)}^{(1)}(\varphi) = \left\{ z\in\mathbb{C} : \left|\arg z + (-1)^{k+1}\varphi\right| \le \frac{\pi}{4} \right\}, \quad G_{i(k)}^{(2)} = \left\{ z\in\mathbb{C} : |z| \ge \rho_{i(k)} \right\},$$

$\rho_{i(k)} > 0$, $i(k)\in I_k$, $k = 0,1,2,\dots$, $-\pi < \varphi \le \pi$, – *задані дійсні сталі, є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД* (2), *якщо збігається ряд* (17), *де величини* η_k *визначаються згідно з* (18). *Для відносних похибок підхідних дробів справджується оцінка* (19).

Д о в е д е н н я. Доведемо, що величини $g_{i(p)}^{(s)}$, які визначаються згідно з (11), інваріантні відносно перетворень еквівалентності

$$r_0\left(r_0 b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{r_{i(k-1)} r_{i(k)}}{r_{i(k)} b_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{21}$$

де $r_{i(k)}$, $r_{i(k)} \ne 0$, – довільні комплексні числа.

Нехай $Q_{i(p)}^{*(s)}$ – залишки s-го підхідного дробу ГЛД (21), тобто

$$Q_{i(p)}^{*(s)} = r_{i(p)} b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{r_{i(p)} r_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{*(s)}}, \quad i(p)\in I_p, \quad p = s-1,\dots,0,$$

$$Q_{i(s)}^{*(s)} = r_{i(s)} b_{i(s)}, \qquad i(s)\in I_s .$$

Покажемо, що

$$Q_{i(p)}^{*(s)} = r_{i(p)} Q_{i(p)}^{(s)}, \qquad i(p)\in I_p, \qquad p = 0,\dots,s, \tag{22}$$

де величини $Q_{i(p)}^{(s)}$ визначаються згідно з (3).

Використаємо метод математичної індукції відносно p, $p = s, s-1, \dots, 0$. При $p = s$ рівність (22) очевидна. Припустимо, що рівність (22) справджується для деякого $p = k+1$, $0 \le k \le s-1$. При $p = k$ маємо

$$Q^{*(s)}_{i(k)} = r_{i(k)} b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{r_{i(k)} r_{i(k+1)}}{Q^{*(s)}_{i(k+1)}} =$$

$$= r_{i(k)} \left(b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{1}{Q^{(s)}_{i(k+1)}} \right) = r_{i(k)} Q^{(s)}_{i(k)}.$$

Тоді

$$g^{*(s)}_{i(p)} = \frac{r_{i(p-1)} r_{i(p)}}{Q^{*(s)}_{i(p-1)} Q^{*(s)}_{i(p)}} = \frac{1}{Q^{(s)}_{i(p-1)} Q^{(s)}_{i(p)}} = g^{(s)}_{i(p)}, \quad i(p) \in I_p, \quad p = 0, \dots, s.$$

Розглянемо ГЛД (21) та $r_0 \left(r_0 \hat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{r_{i(k-1)} r_{i(k)}}{r_{i(k)} \hat{b}_{i(k)}} \right)^{-1}$, які еквівалентні до ГЛД (2) і збуреного до нього ГЛД (4) відповідно, де

$$r_{i(2k)} = \exp(i\varphi), \qquad i(2k) \in I_{2k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$r_{i(2k+1)} = \exp(-i\varphi), \qquad i(2k+1) \in I_{2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)} \in G^{(1)}_{i(k)}(0) \bigcap G^{(2)}_{i(k)}, \qquad i(k) \in I_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Тоді

$$b_{i(2k)} \exp(i\varphi), \hat{b}_{i(2k)} \exp(i\varphi) \in G_{i(2k)}(\varphi),$$

$$b_{i(2k+1)} \exp(-i\varphi), \hat{b}_{i(2k+1)} \exp(-i\varphi) \in G_{i(2k+1)}(\varphi),$$

де множини $G_{i(k)}(\varphi)$ визначаються згідно з (20).

Враховуючи інваріантність величин $g^{(s)}_{i(p)}$ відносно перетворень еквівалентності та теорему 1, доходимо до висновку, що при $b_{i(k)} \in G_{i(k)}(\varphi)$, $\hat{b}_{i(k)} \in G_{i(k)}(\varphi)$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, справджуються нерівності

$$\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left| q^{(s)}_{i(k)} \right| \le \rho^{-1}_{i(k-1)} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \rho^{-1}_{i(k)} \le \eta_{k-1}, \quad i(k) \in I_k, \quad k = 1, \dots, s.$$

Отже, для відносної похибки s-го підхідного дробу виконується оцінка (19), з якої випливає, що збіжність ряду (17) забезпечує виконання умов означення множин відносної стійкості до збурень ГЛД (2). ♦

Теорема 3. *Нехай відносні похибки ГЛД* (2) *задовольняють умови* (15). *Сукупність множин*

$$G_{i(2k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\Gamma_{i(2k)} - \frac{1}{2} \exp(-i\varphi_{2k+1}) \sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \rho^{-1}_{i(2k+1)} \right) \right| \ge \right.$$

$$\left. \ge \rho_{i(2k)} + \frac{1}{2} \sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \rho^{-1}_{i(2k+1)} \right\}, \quad i(2k) \in I_{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$G_{i(2k-1)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\left(z - \sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \frac{\overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho^2_{i(2k)} - \left| \Gamma_{i(2k)} \right|^2} \right) \exp(-i\varphi_{2k-1}) \right) \ge \right.$$

$$\left. \ge \rho_{i(2k-1)} + \sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \frac{\rho_{i(2k)}}{\rho^2_{i(2k)} - \left| \Gamma_{i(2k)} \right|^2} \right\}, \quad i(2k-1) \in I_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

(24)

де $\rho_{i(k)}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, *− задані дійсні додатні сталі,* φ_{2k+1}, $k=$ $=0,1,2,\ldots$, *− задані дійсні сталі,* $\Gamma_{i(2k)}$, $i(2k)\in I_{2k}$, $k=0,1,2,\ldots$, *− задані комплексні сталі такі, що*

$$\left|\Gamma_{i(2k)}\right|<\rho_{i(2k)},\quad i(2k)\in I_{2k},\quad -\pi<\varphi_{2k+1}\le\pi,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД (2)*, якщо збігається ряд* (17)*, де*

$$\eta_{2k}=\max_{i(2k)\in I_{2k}}\left\{\left(\rho_{i(2k)}-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|\right)^{-1}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\rho_{i(2k+1)}^{-1}\right\},\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$\eta_{2k-1}=\max_{i(2k-1)\in I_{2k-1}}\left\{\rho_{i(2k-1)}^{-1}\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}}\left(\rho_{i(2k)}-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|\right)^{-1}\right\},\quad k=1,2,\ldots.$$

Для відносних похибок підхідних дробів справджується оцінка (19).

Д о в е д е н н я. Розглянемо послідовність множин $\{V_{i(k)}\}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, де

$$V_{i(2k)}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\Gamma_{i(2k)}\right|\ge\rho_{i(2k)}\right\},\qquad i(2k)\in I_{2k}, \tag{25}$$

$$V_{i(2k+1)}=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\left(z\exp\left(-i\varphi_{2k+1}\right)\right)\ge\rho_{i(2k+1)}\right\},\quad i(2k+1)\in I_{2k+1}. \tag{26}$$

Оскільки $\left|\Gamma_{i(2k)}\right|<\rho_{i(2k)}$, $i(2k)\in I_{2k}$, $k=0,1,2,\ldots$, то функція $w=1/z$ відображає множину $V_{i(2k)}$ у круг

$$\frac{1}{V_{i(2k)}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+\frac{\overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}\right|\le\frac{\rho_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}\right\}.$$

Тоді маємо, що

$$b_{i(2k-1)}+\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}}\frac{1}{V_{i(2k)}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-q_{i(2k-1)}\right|\le r_{i(2k-1)}\right\},$$

де

$$q_{i(2k-1)}=b_{i(2k-1)}-\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}}\frac{\overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2},$$

$$r_{i(2k-1)}=\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}}\frac{\rho_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}.$$

Умови $b_{i(2k-1)}\in V_{i(2k-1)}$, $b_{i(2k-1)}+\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}}\frac{1}{V_{i(2k)}}\subset V_{i(2k-1)}$ виконуються, якщо

$$\operatorname{Re}\left(\exp\left(-i\varphi_{2k-1}\right)\sum_{i_{2k}=1}^{N}\frac{\overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}\right)+\sum_{i_{2k}=1}^{N}\frac{\rho_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}\ge 0, \tag{27}$$

$$q_{i(2k-1)}\in V_{i(2k-1)}, \tag{28}$$

$$\min\left\{\left|q_{i(2k-1)}-v\right|,\ v\in\partial V_{i(2k-1)}\right\}\ge r_{i(2k-1)}. \tag{29}$$

Нерівність (27) справджується, якщо

$$\left|\sum_{i_{2k}=1}^{N}\frac{\overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}\right|\le\sum_{i_{2k}=1}^{N}\frac{\rho_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^2-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2}.$$

Ця нерівність випливає з умови $\left|\Gamma_{i(2k)}\right|<\rho_{i(2k)}$.

Підставивши величину $q_{i(2k-1)}$ у (26), маємо

$$\operatorname{Re}\left(\left(b_{i(2k-1)}-\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}}\frac{\overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho_{i(2k)}^{2}-\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^{2}}\right)\exp(-i\varphi_{2k-1})\right)\geq\rho_{i(2k-1)}.$$

Ця нерівність випливає з (24), що доводить виконання (28).

Точка $z\in\partial V_{i(2k-1)}$, така, що $\left|z-q_{i(2k-1)}\right|=\min\limits_{v\in\partial V_{i(2k-1)}}\left\{\left|q_{i(2k-1)}-v\right|\right\}$, визначається формулою $z=\exp(i\varphi_{2k-1})\left(\rho_{i(2k-1)}+i\operatorname{Im}\left(q_{i(2k-1)}\exp(-i\varphi_{2k-1})\right)\right)$. Тоді

$$\left|z-q_{i(2k-1)}\right|=\left|q_{i(2k-1)}\right|\cos\left(\arg q_{i(2k-1)}-\varphi_{2k-1}\right)-\rho_{i(2k-1)}=$$

$$=\operatorname{Re}\left(q_{i(2k-1)}\exp(-i\varphi_{2k-1})\right)-\rho_{i(2k-1)}$$

і умова (29) еквівалентна нерівності, якою визначаються множини (24).

Оскільки $\left|\Gamma_{i(2k)}-q_{i(2k)}^{*}\right|+\rho_{i(2k)}\leq r_{i(2k)}^{*}$, де

$$q_{i(2k)}^{*}=\Gamma_{i(2k)}-\frac{\exp(-i\varphi_{2k+1})}{2}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\rho_{i(2k+1)}^{-1},$$

$$r_{i(2k)}^{*}=\rho_{i(2k)}+\frac{1}{2}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\rho_{i(2k+1)}^{-1},$$

то $G_{i(2k)}\subset V_{i(2k)}$ і $b_{i(2k)}\in V_{i(2k)}$, $i(2k)\in I_{2k}$, $k=0,1,2,\ldots$.

З умови $\rho_{i(2k+1)}>0$ випливає, що функція $w=1/z$ відображає множину $V_{i(2k+1)}$ у круг $\dfrac{1}{V_{i(2k+1)}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{1}{2}\exp(-i\varphi_{2k+1})\rho_{i(2k+1)}^{-1}\right|\leq\frac{1}{2}\rho_{i(2k+1)}^{-1}\right\}$. Тоді маємо, що

$$b_{i(2k)}+\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\frac{1}{V_{i(2k+1)}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-q_{i(2k)}\right|\leq r_{i(2k)}\right\},$$

де

$$q_{i(2k)}=b_{i(2k)}+\frac{1}{2}\exp(-i\varphi_{2k+1})\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\rho_{i(2k+1)}^{-1},$$

$$r_{i(2k)}=\frac{1}{2}\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\rho_{i(2k+1)}^{-1}.$$

Умова $b_{i(2k)}+\sum\limits_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k)}}\dfrac{1}{V_{i(2k+1)}}\subset V_{i(2k)}$ виконується, якщо

$$q_{i(2k)}\in V_{i(2k)},\tag{30}$$

$$\left|q_{i(2k)}-\Gamma_{i(2k)}\right|\geq\rho_{i(2k)}+r_{i(2k)}.\tag{31}$$

Нерівність (31) еквівалентна нерівності (23). Підставивши величину $q_{i(2k)}$ у (25), маємо

$$\left|b_{i(2k)}-\left(\Gamma_{i(2k)}-\frac{1}{2}\exp(-i\varphi_{2k+1})\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}}\rho_{i(2k+1)}^{-1}\right)\right|\geq\rho_{i(2k)}.$$

Ця нерівність випливає з (23), що доводить (30).

Отже, сукупність множин (25), (26) є послідовністю множин значень залишків підхідних дробів ГЛД (2), (4), і для величин $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left| q_{i(k)}^{(s)} \right|$, $i(k-1) \in I_{k-1}$, $k = 1, \ldots, s$, маємо такі оцінки:

$$\sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \left| q_{i(2k+1)}^{(s)} \right| \le \left(\rho_{i(2k)} - \left| \Gamma_{i(2k)} \right| \right)^{-1} \sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \rho_{i(2k+1)}^{-1} \le \eta_{2k} ,$$

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \left| q_{i(2k)}^{(s)} \right| \le \rho_{i(2k-1)}^{-1} \sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \left(\rho_{i(2k)} - \left| \Gamma_{i(2k)} \right| \right)^{-1} \le \eta_{2k-1} .$$

Отже, для відносних похибок s-х підхідних дробів ГЛД (2) справджується оцінка (19).

Як і при доведенні попередніх теорем, доходимо до висновку, що сукупність множин (23), (24) є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД (2), якщо збігається ряд (17). ♦

1. *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 27–35.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О. М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 3–7.
4. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Сер. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 18–27.
5. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 207–212.
6. *Гладун В. Р.* Множини абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 768. – С. 63–70.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii + 428 p. – Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. – Vol. 11.
8. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
9. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
10. *Backeljauw F., Becuwe S., Cuyt A.* Validated evaluation of special mathematical functions // Lect. Notes Comput. Sci. – 2008. – **5144**. – P. 206–216.
11. *Blanch G.* Numerical evaluation of continued fractions // SIAM Rev. – 1964. – **6**. – P. 383–421.
12. *Craviotto C. M., Jones W. B., Wyshinski N. J.* Computation of the Binet and Gamma functions by Stieltjes continued fractions // In: Orthogonal Functions, Moment Theory and Continued Fractions: Theory and Applications / W. B. Jones and A. Sri Ranga, eds. // Lect. Notes Pure Appl. Math. – 1998. – **199**. – P. 151–179.
13. *Cuyt A., van Der Cruyssen P.* Rounding error analysis for forward continued fraction algorithms // Comput. Math. Appl. –1985. – **11**, No. 6. – P. 541–564.
14. *Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of continued fractions for special functions. – Berlin: Springer, 2008. – 431 p.
15. *Gautschi W.* Computational aspects of three-term recurrence relations // SIAM Rev. – 1967. – **9**. – P. 24–82.
16. *Gil A., Segura J., Temme N. M.* Numerical methods for special functions. – Philadelphia: SIAM, 2007. –417 p.
17. *Higham N. J.* Accuracy and stability of numerical algorithms. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 680 p.
18. *Macon N., Baskervill M.* On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions // J. Assoc. Comput. Mach. – 1956. – **3**, No. 3. – P. 199–202.

НЕКОТОРЫЕ МНОЖЕСТВА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ПЕРЕМЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ВЕТВЕЙ РАЗВЕТВЛЕНИЯ

Статья посвящена изучению условий, при выполнении которых бесконечные ветвящиеся цепные дроби устойчивы к возмущениям их элементов. Установлены формулы относительных погрешностей подходящих дробей ветвящихся цепных дробей с комплексными частными знаменателями и числителями, равными единице. С использованием методики множеств элементов и соответствующих им множеств значений остатков подходящих дробей построены множества относительной устойчивости к возмущениям – угловые множества, а также множества, которые на четных этажах дроби являются внешностью кругов, а на нечетных – полуплоскостями. Получены оценки относительных погрешностей подходящих дробей таких ветвящихся цепных дробей.

SOME SETS OF RELATIVE STABILITY TO PERTURBATIONS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS AND VARIABLE NUMBER OF BRANCHES OF BRANCHING

The article deals with investigating the conditions under which the infinite branched continued fractions are stable to perturbations of their elements. The formulas of relative errors of the approximants of branched continued fractions with complex partial denominators and numerators that are equal to one are established. Using the technique of sets of elements and corresponding them sets of values of tails the sets of relative stability to perturbations namely the angular sets and the sets that are the exterior of circular sets on the even floors of the fraction and the half-planes on the odd floors are constructed. The estimates of relative errors of approximants of such branched continued fractions are established.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.03.14