6. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах.— В кн.: Рост и дефекты металлических кристаллов. «Наукова думка», К., 1972.
7. Любов Б. Я., Сапожников Б. Л. О некоторых решениях проблемы Стефана в обобщенной постановке.— В кн.: Рост и деффекты металлических кристаллов. «Наукова думка», К., 1972.
8. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й. Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів.— Вісн. АН УРСР, 1970, 12.
9. Підстригач Я. С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі.— ДАН УРСР, 1961, 2.
10. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Основные уравнения плоской задачи термодиффузии.— ПММ, 1965, 1, 3.
11. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— УМН, 1965, 20, 5 (125).
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I. «Наука», М., 1973.
13. Стрикленд-Констебл Р. Ф. Кинетика и механизм кристаллизации. «Недра», Л., 1971.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. «Наука», М., 1972.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1974 г.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЖОУЛЕВА ТЕПЛА ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ

Б. И. Колодий, Б. И. Чорный

Индукционный нагрев имеет широкое применение в практике термообработки металлических конструкций. При таком нагреве в электропроводных телах, находящихся под воздействием внешнего электромагнитного поля, возникают электрические токи, протекание которых сопровождается выделением джоулева тепла. Индукционные токи и соответствующее им джоулево тепло определяются на основании решения уравнений электродинамики. Получение точного решения этих уравнений связано обычно со значительными математическими трудностями. Поэтому возникает необходимость разработки эффективных приближенных методов нахождения электромагнитного поля и джоулева тепла в электропроводных телах.

Рассмотрим методику приближенного решения такой задачи для изотропных электропроводных тел с плоскими границами простейшей конфигурации, а именно: для полупространства и бесконечного слоя. Отнесем их к прямоугольной декартовой системе координат, причем координатные оси x, z размещены в плоскости раздела тело — вакуум, а ось y имеет направление внешней к телу нормали.

Применительно к индукционному нагреву, соответствующему квазиустановившемуся режиму работы индуктора, плотность тока представим в виде

$$\vec{j}^{(e)}(x, y, z, t) = j(t)\vec{f}_1(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad j(t) > 0. \tag{1}$$

При этом принимается, что амплитуда плотности тока относительно мало изменяется во времени за период колебания, т. е.

$$\left|\frac{dj(t)}{dt}\right| \ll \omega j(t), \quad \left|\frac{d^2 j(t)}{dt^2}\right| \ll \omega^2 j(t). \tag{2}$$

Здесь t — время, ω — циклическая частота. В применяемых режимах работы индуктора такие условия практически всегда имеют место, кроме, может быть, моментов включения и выключения индуктора.

Для квазиустановившегося режима напряженности электрического и магнитного полей можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{E}}(x, y, z, t) &= j(t)\vec{E}(x, y, z)e^{i\omega t}, \\ \vec{\mathrm{H}}(x, y, z, t) &= j(t)\vec{H}(x, y, z)e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{3}$$

для области электропроводного тела и

$$\vec{E}_0(x, y, z, t) = j(t)\vec{E}_0(x, y, z)\, e^{i\omega t},$$
$$\vec{H}(x, y, z, t) = j(t)\vec{H}_0(x, y, z)\, e^{i\omega t} \tag{4}$$

для области вакуума.

В такой постановке рассмотрим нагрев электропроводного слоя, занимающего область $-d < y < 0$, системой прямолинейных токов в направлении оси z, расположенных в плоскости $y = h$. Примем, что плотность тока не зависит от координаты z и характеризуется составляющей по оси z вида

$$j_z^{(e)}(x, y, t) = j(t) f(x)\, \delta(y - h)\, e^{i\omega t}, \tag{5}$$

где $\delta(u)$ — дельта-функция.

При заданном распределении внешних токов отличными от нуля будут z-составляющие напряженности электрического поля, x- и y-составляющие напряженности магнитного поля. Функции E_z и E_{0z} определяются из решения системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned}
&(\Delta + k_0^2)\, E_{0z}(x, y) = -i\mu_0\omega f(x)\,\delta(y-h) && \text{для } y > 0,\\
&(\Delta + k^2)\, E_z(x, y) = 0 && \text{для } -d < y < 0,\\
&(\Delta + k_0^2)\, E_{0z}(x, y) = 0 && \text{для } y < -d
\end{aligned} \tag{6}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned}
&E_{0z}(x, 0) = E_z(x, 0), \quad \frac{\partial E_{0z}(x, 0)}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\mu}\,\frac{\partial E_z(x, 0)}{\partial y},\\
&E_{0z}(x, -d) = E_z(x, -d), \quad \frac{\partial E_{0z}(x, -d)}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\mu}\,\frac{\partial E_z(x, -d)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{7}$$

и условиях излучения

$$\lim_{y \to \pm\infty}\left[\frac{\partial E_{0z}(x, y)}{\partial y} + ik_0 E_{0z}(x, y)\right] = 0, \quad \lim_{y \to \pm\infty} E_{0z}(x, y) < \infty. \tag{8}$$

Здесь $k_0^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$, $k^2 = \mu\omega(\varepsilon\omega - i\sigma)$; ε_0, ε — диэлектрические проницаемости вакуума и тела, μ_0, μ — магнитные проницаемости вакуума и тела, σ — коэффициент электропроводности.

Если применить к системе уравнений (6) и условиям (7), (8) преобразование Фурье по координате x, то сформулированную контактную задачу об определении функции E_z можно свести к соответствующей задаче для области слоя:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - p^2\right)\bar{E}_z(\xi, y) = 0 \tag{9}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mu_0}{\mu}\,\frac{d}{dy} + p_0\right)\bar{E}_z(\xi, 0) = i\omega\mu_0 \bar{f}(\xi)\, e^{-p_0 h},\\
&\left(\frac{\mu_0}{\mu}\,\frac{d}{dy} - p_0\right)\bar{E}_z(\xi, -d) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\bar{E}_z(\xi, y)$, $\bar{f}(\xi)$ — трансформанты Фурье от функций $E_z(x, y)$ и $f(x)$, $p_0^2 = \xi^2 - k_0^2$, $p^2 = \xi^2 - k^2$, $\operatorname{Re} p_0 > 0$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Решая уравнение (9) при условиях (10), получаем

$$E_z(x, y) = \frac{i\omega\mu_0\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}(\xi)\, e^{-p_0 h}\left[(\mu_0 p + \mu p_0)\, e^{py} + (\mu_0 p - \mu p_0)\, e^{-p(2d+y)}\right]}{(\mu_0 p + \mu p_0)^2 - (\mu_0 p - \mu p_0)^2\, e^{-2pd}}\, e^{-i\xi x} d\xi. \tag{11}$$

Как видно из выражения (11), нахождение электромагнитного поля в теле для многих конкретных случаев задания функции $f(x)$ представляет значительную трудность. Такая задача упростится, если учесть, что длина электромагнитной волны в металлическом теле, которая по величине совпадает с глубиной проникновения δ электромагнитного поля в нем, мала по сравнению с длиной волны в вакууме. Поэтому произвольная электромагнитная волна, преломляясь на границе проводящего тела, будет проникать в его толщу в направлении, близком к нормали, т. е. как плоская волна [1, 2]. В пределах такого приближения вектор-функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \vec{E}(x, 0, z)\, E_n(y), \\ \vec{H}(x, y, z) &= \vec{H}(x, 0, z)\, H_n(y). \end{aligned} \tag{12}$$

Функции $E_n(y)$, $H_n(y)$ характеризуют закон распространения плоской электромагнитной волны по толщине тела. В дальнейшем примем $E_n(0) = H_n(0) = 1$.

При определении функций $E_n(y)$ и $H_n(y)$ в слое будем исходить из предположения, что электромагнитная волна проникает в область вакуума $y < -d$ так же, как плоская. В этом случае, учитывая соответствующие условия контакта (7) на границе $y = -d$ и условия излучения (8) при $y \to -\infty$, приходим к следующей задаче для нахождения $E_n(y)$:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + k^2\right) E_n(y) = 0 \tag{13}$$

при граничных условиях

$$E_n(0) = 1, \left(\frac{\mu_0}{\mu}\frac{d}{dy} - ik_0\right) E_n(-d) = 0. \tag{14}$$

Отсюда находим

$$E_n(y) = \frac{(\mu_0 k + \mu k_0)\, e^{iky} + (\mu_0 k - \mu k_0)\, e^{-ik(2d+y)}}{\mu_0 k + \mu k_0 + (\mu_0 k - \mu k_0)\, e^{-2ikd}}. \tag{15}$$

Аналогичное уравнение и граничные условия для определения $H_n(y)$ получим из (13) и (14), заменяя E_n на H_n, а также во втором из условий (14) $\frac{\mu_0}{\mu}$ на $\frac{\mu k_0^2}{\mu_0 k^2}$. Решение этого уравнения имеет вид

$$H_n(y) = \frac{(\mu_0 k + \mu k_0)\, e^{iky} - (\mu_0 k - \mu k_0)\, e^{-ik(2d+y)}}{\mu_0 k + \mu k_0 - (\mu_0 k - \mu k_0)\, e^{-2ikd}}. \tag{16}$$

Плоская электромагнитная волна будет распространяться в слое как в полубесконечном теле, т. е.

$$E_n(y) = H_n(y) = e^{iky}, \tag{17}$$

только тогда, когда толщина слоя удовлетворяет условию

$$d \gg \frac{\delta}{2\sqrt{2}}, \tag{18}$$

которое означает, что в этом случае вкладом отраженной от нижней границы слоя ($y = -d$) электромагнитной волны в суммарное электромагнитное поле в нем можно пренебречь. Так как для металлов при частотах, применяемых в индукционном нагреве ($\omega \leqslant 2\pi \cdot 10^6$ *сек*$^{-1}$), имеет место неравенство $\varepsilon\omega \ll \delta$, то здесь и далее $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$.

Значит, если известен закон распространения плоской электромагнитной волны по толщине тела, то для определения электромагнитного поля в нем достаточно найти вектор-функцию $\vec{E}$ (или $\vec{H}$) на границе тела.

В силу принятых предположений о закономерности распространения электромагнитного поля в теле величина усредненного во времени по периоду колебаний электромагнитной волны потока электромагнитной энергии определяется выражением [1]

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\, j^2(t)\,|(\vec{H}_s(x, 0, z)\, H_n(y)\,|^2. \qquad (19)$$

Здесь $\vec{H}_s(x, 0, z)$ — касательная составляющая вектора $\vec{H}$ на границе тела.

Удельная мощность джоулева тепла Q представляется соотношением

$$Q(x, y, z, t) = \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|, \qquad (20)$$

которое вытекает из аналитического выражения теоремы Пойтинга. Таким образом, задача об определении джоулева тепла в электропроводных телах с плоскими границами сводится к нахождению зависящей от схемы индукционного нагрева вектор-функции $\vec{H}_s(x, y, z)$ на границе тела.

Покажем на примере нагрева полубесконечного тела прямолинейным током, расположенным на расстоянии h от поверхности ($f(x) = \delta(x)$ в (5)), что при определенных ограничениях на параметры индукционного нагрева имеет место соотношение

$$\vec{H}_s(x, 0, z) \approx 2\vec{H}_{0s}(x, 0, z). \qquad (21)$$

Здесь $\vec{H}_{0s}(x, 0, z)$ — касательная составляющая вектора напряженности первичного магнитного поля $\vec{H}_0$ в бесконечном однородном пространстве (вакууме).

В рассматриваемом случае вектор-функция $\vec{H}_s$ имеет только x-составляющую, которая определяется соотношением

$$H_x = \frac{i}{\mu\omega}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad (22)$$

и для области полубесконечного тела с учетом выражения (12) записывается в виде

$$H_x(x, 0) = -\frac{\mu_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p\bar{f}(\xi)\, e^{-p_0 h}}{\mu_0 p + \mu p_0}\, e^{-i\xi x} d\xi. \qquad (23)$$

Отсюда, учитывая, что для неферромагнитного тела $\mu \approx \mu_0$, и принимая $k_0 = 0$, что соответствует пренебрежению токами смещения вне тела, при $\bar{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ находим

$$H_x(x, 0) = \frac{i}{4k}(\Omega^+ + \Omega^-) - \frac{1}{\pi}\frac{h}{h^2 + x^2}\left[1 - \frac{2(h^2 - 3x^2)}{k^2(h^2 + x^2)^2}\right]. \qquad (24)$$

Здесь $\Omega^{\pm} = -\frac{k^2}{\varkappa^{\pm}}\left\{iL_0(-i\varkappa^{\pm}) - N_0(\varkappa^{\pm}) + \frac{2}{\varkappa^{\pm}}[L_1(-i\varkappa^{\pm}) + N_1(\varkappa^{\pm})]\right\}$,

$N_\nu(u)$, $L_\nu(-iu)$ — функции Неймана и Струве порядка ν, $\varkappa^{\pm} = ik(h \pm ix)$.

Учитывая асимптотическое разложение функции $L_\nu(-iu)$, получаем выражение

$$L_\nu(-iu) = -ie^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\left[N_\nu(u) + \frac{2}{\pi}u^{\nu-1}\right], \quad \nu = 0;\ 1, \qquad (25)$$

которое верно для $|u| \gg 1$, что соответствует в рассматриваемом случае соотношению

$$\sqrt{h^2 + x^2} \gg \frac{\delta}{\sqrt{2}}. \qquad (26)$$

Таким образом, выражение (24) при условии (26) принимает вид

$$H_x(x, 0) = -\frac{1}{\pi}\frac{h}{h^2 + x^2}. \qquad (27)$$

Касательную составляющую вектор-функции напряженности первичного магнитного поля в бесконечном вакууме

$$H_{0x}(x, 0) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-p_0 h} e^{-i\xi x} d\xi \tag{28}$$

получим из (23), если положить $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Так как в данном случае $\bar{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, то $H_{0x}(x, 0)$ запишется в виде

$$H_{0x}(x, 0) = -\frac{ik_0}{2\pi} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} K_1 (ik_0 \sqrt{h^2 + x^2}), \tag{29}$$

где $K_1(u)$ — функция Макдональда первого порядка.

Ограничимся рассмотрением области, для которой верно соотношение

$$\sqrt{h^2 + x^2} \ll \frac{1}{k_0}. \tag{30}$$

Разлагая функцию K_1 в ряд по малым значениям аргумента, ограничиваясь при этом первым членом разложения, получаем

$$H_{0x}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{h}{h^2 + x^2}. \tag{31}$$

Сравнивая выражения (27) и (31), убеждаемся, что в рассматриваемом приближении соотношение (21) выполняется при условиях (26) и (30), т. е.

$$\frac{1}{k_0} \gg \sqrt{h^2 + x^2} \gg \frac{\delta}{\sqrt{2}}. \tag{32}$$

Учитывая, что левая часть неравенства соблюдается практически всегда, приходим к условию

$$h \gg \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \tag{33}$$

означающему, что расстояние от индуктора до поверхности тела должно быть больше глубины проникновения электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М., 1954.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1974 г.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ

Р. М. Швец, В. И. Елейко

Рассмотрим неограниченную пластину толщины h, которая находится в тепловом контакте с внешней средой. К одной плоскости пластины $\left(z = \frac{h}{2}\right)$ подводится тепловой поток, являющийся стохастической функцией времени $q_c = \chi_3(\tau)$, а другая плоскость $\left(z = -\frac{h}{2}\right)$ теплоизолирована. Начальное распределение температуры (при $\tau = 0$) задано случайной функцией координаты $\chi_2(x)$.

При заданных краевых условиях случайное температурное поле в пластине описывается уравнением [2]

$$c\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad -\frac{h}{2} < x < +\frac{h}{2}, \quad \tau > 0 \tag{1}$$