Следовательно,

$$\overset{(N)}{u}(x) = \frac{1}{2}\int_S \overset{(2)}{G}(y-x)\overset{(N)}{f}(y)\,d_yS - \frac{1}{2\Delta}\int_D \overset{(N)}{u}(y)\,dy, \quad x \in D,$$

где Δ — объем области D, $\overset{(z)}{G}(y-x)$ — матрица Грина задачи Неймана [3].

Поскольку решение исходной задачи Неймана представимо в виде

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_S \overset{(2)}{G}(y-x)f(y)\,d_yS - \frac{1}{2\Delta}\int_D u(y)\,dy, \quad x \in D,$$

то

$$u(x) - \overset{(N)}{u}(x) - \chi = \frac{1}{2}\int_S \overset{(2)}{G}(y-x)\,[f(y) - \overset{(N)}{f}(y)]\,d_yS,$$

где $\chi = \frac{1}{2\Delta}\int_D [\overset{(N)}{u}(y) - u(y)]\,dy$ — постоянный столбец. Применяя к правой части последнего равенства неравенство Коши — Буняковского, в силу (12) получаем

$$u(x) = \lim_{N\to\infty} \overset{(N)}{u}(x) + \chi, \quad x \in \overline{D}_1 \subset D,$$

где $\overset{(N)}{u}(x)$ определено формулой (14). Таким образом, искомое приближенное решение построено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурчуладзе Т. В. Об одном способе приближенного решения граничных задач для некоторых эллиптических систем.— Труды Тбилисского мат. ин-та, 1967, 32.
2. Волошина М. С. О некоторых граничных задачах для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка.— ДАН УССР, 1959, 4.
3. Волошина М. С. Решение задач Дирихле и Неймана для некоторых систем дифференциальных уравнений с помощью матриц Грина.— Вестн. Львовского политехн. ин-та. Вопросы алгебры и теории дифференциальных уравнений, 1973, 68.
4. Волошина М. С. О некоторых свойствах одного класса сильно эллиптических систем.— ДАН УССР, 1958, 9.
5. Волошина М. С. О теореме Таубера — Ляпунова для некоторых интегралов типа потенциала двойного слоя.— ДАН УССР. Сер. А, 1967, 6.
6. Купрадзе В. Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1968.
7. Лаврук Б. Р. Об одной граничной задаче для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.— ДАН УССР, 1956, 3.
8. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений.— УМЖ, 1951, 3, 1.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в июне 1974 г.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В. Н. Цымбал

В прямоугольнике $D: \{0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\},\ 0 < l < \infty,\ 0 < T < \infty$, рассмотрим гиперболическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым действительным параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - \varepsilon\lambda_i(x, t)\frac{\partial U_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, t)U_j + f_i(x, t) \quad (i = 1, \ldots, m), \quad (1)$$

где $\lambda_i(x, t)$, $a_{ij}(x, t)$, $f_i(x, t)$ — заданные в $\overline{D}$ функции (предположения о гладкости будут указаны ниже), $U_i(x, t)$ — искомые функции.

Предположим, что система гиперболическая, т. е. все λ_i (x, t) действительны при всех $(x, t) \in \bar{D}$. Пусть в каждой точке $(x, t) \in D$

$$\lambda_1(x, t) \leqslant \lambda_2(x, t) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m(x, t),$$

причем первые k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ из величин λ_i (x, t) пусть будут отрицательными, а остальные $m - k$ — положительными всюду в $\bar{D}$.

Для системы (1) ставим начальные

$$U_i(x, t) = g_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ 0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

и граничные условия

$$U_i(0, t) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t) U_j(0, t) + h_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{3}$$

$$U_i(l, t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t) U_j(l, t) + h_i(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T;\ i = k+1, \ldots, m). \tag{4}$$

Предполагаются выполненными условия согласования нулевого порядка

$$\begin{gathered} g_i(0) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(0) g_j(0) + h_i(0) \qquad (i = 1, \ldots, k), \\ g_i(l) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(0) g_j(l) + h_i(0) \qquad (i = k+1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{5}$$

и первого порядка

$$\begin{gathered} \frac{dg_s(0)}{dx} = \frac{1}{\lambda_s(0, 0)} \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{sj}(0) \lambda_j(0, 0) \frac{dg_j(0)}{dx} \qquad (s = 1, \ldots, k), \\ \frac{dg_s(l)}{dx} = \frac{1}{\lambda_s(l, 0)} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{sj}(0) \lambda_j(l, 0) \frac{dg_j(l)}{dx} \qquad (s = 1, \ldots, k), \\ \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{sj}(0) \left[\sum_{r=1}^{m} a_{jr}(0, 0) g_r(0) + f_j(0, 0) \right] - \sum_{j=1}^{m} a_{sj}(0, 0) g_j(0) - \\ - f_s(0, 0) + \sum_{j=k+1}^{m} \frac{d\alpha_{sj}(0)}{dt} g_j(0) + \frac{dh_s(0)}{dt} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k), \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_{sj}(0) \left[\sum_{r=1}^{m} a_{jr}(l, 0) g_r(l) + f_j(l, 0) \right] - \sum_{j=1}^{m} a_{sj}(l, 0) g_j(l) - \\ - f_s(l, 0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d\alpha_{sj}(0)}{dt} g_j(l) + \frac{dh_s(0)}{dt} = 0 \qquad (s = k+1, \ldots, m). \end{gathered} \tag{6}$$

Заметим, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача однозначно разрешима [1].

Пользуясь методом Люстерника — Вишика [2], построим асимптотическое разложение решения задачи (1) — (4) по малому параметру ε. Решение будем искать в виде

$$U(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i [\bar{U}^i(x, t) + \Pi^i(\xi, t) + Q^i(\eta, t)] + \varepsilon^{n+1} Z_n, \tag{7}$$

где $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, $\eta = \frac{l - x}{\varepsilon}$.

Функции $\bar{U}^i$ (x, t) $(i = 0, 1, \ldots, n)$ определяются подстановкой в уравнение (1) ряда $\sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{U}^i$ (x, t) и приравниванием коэффициентов при одинакоых степенях ε. Это дает

$$\frac{\partial \bar{U}^r}{\partial t} = A(x, t)\bar{U}^r + \Psi^r(x, t) \qquad (r = 0, \ldots, n), \tag{8}$$

где

$$\Psi^0(x, t) = f(x, t), \; \Psi^j(x, t) = \Lambda(x, t)\frac{\partial \bar{U}^{j-1}}{\partial x} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\Lambda(x, t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(x, t), \ldots, \lambda_m(x, t)\}.$$

Эта последовательность уравнений решается при начальных условиях

$$\bar{U}^r(x, 0) = g^r(x) \qquad (r = 0, \ldots, n; \; 0 \leqslant x \leqslant l), \tag{9}$$

где $g^0(x) = g(x)$, $g^r(x) \equiv 0$ $(r = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, для определения функций $\bar{U}^i$ $(i = 0, \ldots, n)$ получили ряд последовательно решаемых задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для устранения невязки в граничных условиях служат ряды

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \Pi^i(\xi, t), \; \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i Q^i(\eta, t). \tag{10}$$

Функции $\Pi^i(\xi, t)$ являются функциями типа пограничного слоя (гиперболического [4]) на левой стороне прямоугольника D. Эти функции являются решениями задач, которые получаются, если в однородной системе, соответствующей системе (1), произвести регуляризующее преобразование $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, коэффициенты $\lambda_i(\varepsilon\xi, t)$, $a_{ij}(\varepsilon\xi, t)$ разложить в ряды по степеням $x = \varepsilon\xi$, подставить вместо U первый из рядов (10) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получаем уравнения

$$\frac{\partial \Pi_i^k}{\partial t} - \lambda_i(0,t)\frac{\partial \Pi_i^k}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0, t)\Pi_j^k + F_i^k(0, t) \tag{11}$$

$$(k = 0, \ldots, n; \; i = 1, \ldots, m),$$

где $F^0(0, t) \equiv 0$, $F^k(0, t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — известные функции, начальные

$$\Pi^k(\xi, 0) = 0 \qquad (k = 0, \ldots, n) \tag{12}$$

и граничные условия

$$\Pi_i^p(0, t) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t)\Pi_j^p(0, t) + T\bar{U}_j^p + h_i^p(t) \tag{13}$$

$$(i = 1, \ldots, k; \; p = 0, \ldots, n),$$

где

$$TU_i = -U_i(0, t) + \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t)U_j(0, t), \; h_i^0(t) = h_i(t), \; h_i^p(t) \equiv 0$$

$$(i = 1, \ldots, m; \; p = 1, \ldots, n).$$

Легко видеть в силу конечности области зависимости для гиперболических уравнений, что функция $\Pi^0(\xi, t)$ отлична от нуля лишь в граничной полоске F между осью Ot и характеристикой системы (1) с угловым коэффициентом $-\frac{1}{\lambda_1(0,0)}$. Функции $\Pi^p(\xi, t)$ $(p = 1, \ldots, n)$ также имеют вид функций пограничного слоя в силу того, что функции $F^k(0, t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ также отличны от нуля лишь в граничной полоске F.

Функции $Q^i(\eta, t)$ являются функциями типа пограничного слоя на правой стороне прямоугольника D. Эти функции являются решениями задач, которые получаются, если в однородной системе уравнений, соответствующей системе (1), произвести регуляризующее преобразование $\eta = \frac{l-x}{\varepsilon}$, коэффициенты $\lambda_i\ (l - \varepsilon\eta,\ t)$, $a_{ij}\ (l - \varepsilon\eta,\ t)$ разложить по степеням $x = l - \varepsilon\eta$, подставить вместо u второй ряд из (10) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим уравнения

$$\frac{\partial Q_i^k}{\partial t} + \lambda_i(l,\ t)\frac{\partial Q_i^k}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(l,\ t)\,Q_j^k + \Phi^k(l,\ t) \tag{14}$$

$$(k = 0,\ \ldots,\ n;\ i = 1,\ \ldots,\ m),$$

где $\Phi^0\ (l,\ t) \equiv 0$, $\Phi^k\ (l,\ t)$ — известные функции, начальные

$$Q^k(\eta,\ 0) = 0 \qquad (k = 0,\ \ldots,\ n) \tag{15}$$

и граничные условия

$$Q_i^p(l,\ t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(t)\,Q_j^p(l,\ t) + K\overline{U}_i^p + h_i^p(t) \tag{16}$$

$$(p = 0,\ \ldots n;\ i = k+1,\ \ldots,\ m),$$

где $KU_i = -U_i(l,\ t) + \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(t)\,U_j(l,\ t)$, $h_i^0(t) = h_i(t)$, $h_i^p(t) \equiv 0$ $(i = k + 1,\ \ldots,\ m;\ p = 1,\ \ldots,\ n)$.

Функция $Q^0\ (\eta,\ t)$ отлична от нуля лишь в граничной полоске P между прямой $x = l$ и характеристикой с угловым коэффициентом $-\frac{1}{\lambda_m(l,\ 0)}$. Функции $Q^p\ (\eta,\ t)$ $(p = 1,\ \ldots,\ n)$ также имеют вид функций пограничного слоя в силу того, что функции $\Phi^k\ (l,\ t)$ также отличны от нуля только в граничной полоске P.

Для доказательства асимптотической корректности разложения получена оценка остаточного члена Z_n, являющегося решением следующей задачи:

$$\frac{\partial Z_{ni}}{\partial t} - \varepsilon\lambda_i\ (x,\ t)\frac{\partial Z_{ni}}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,\ t)\,Z_{nj} + \Psi_i(x,\ t) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m),$$

$$Z_n(x,\ 0) = 0,$$

$$Z_{ni}(0,\ t) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t)\,Z_{nj}(0,\ t) \qquad (i = 1,\ \ldots,\ k),$$

$$Z_{ni}(l,\ t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(t)\,Z_{nj}(l,\ t) \qquad (i = k+1,\ \ldots,\ m).$$

Граничные условия всегда могут быть сделаны диссипативными. Легко получить оценку [3]

$$\|Z_n\| \leqslant \mathrm{const}\,\|\Psi\|, \tag{17}$$

где

$$\|v\| = \max_{T \geqslant t \geqslant 0} \sqrt{\int_0^l \sum_{i=1}^{m} v_i^2(x,\ t)\,dx}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции* $a_{ij}\ (x,\ t)$, $f_i\ (x,\ t)$ $(i,\ j = 1,\ \ldots,\ m)$ $n + 2$ *раза непрерывно дифференцируемы по* x *и* $n + 1$ *раз непрерывно дифференцируемы по* t *в* $\overline{D}$, *функции* $\lambda_i\ (x,\ t)$ *непрерывно дифференцируемы* $n + 1$ *раз по* x *и* n *раз непрерывно дифференцируемы по* t *в* D, $g_i\ (x)$ *непрерывно дифференцируемы* $n + 2$ *раза на промежутке* $(0,\ l)$, $h_i\ (t)$ *и* $\alpha_{ij}\ (t)$ *непрерывно дифференцируемы* $n + 1$ *раз для всех* $t \in [0,\ T]$ *и пусть выполняются условия согласования* (5), (6). *Тогда решение задачи* (1) — (4) *представляется в виде*

$$U(x,\ t,\ \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i\,[\overline{U}^i(x,\ t) + \Pi^i(\xi,\ t) + Q^i(\eta,\ t)] + \varepsilon^{n+1}Z_n,$$

где $\overline{U}^i$ — *решения задач Коши* (8), (9); $\Pi^i(\xi, t)$, $Q^i(\eta, t)$ — *функции гиперболического пограничного слоя, ликвидирующие невязки соответственно на левой и правой сторонах прямоугольника* D, *а* Z_n *удовлетворяет* (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости.— Учен. зап. Латвийского ун-та, 1958, 20, 3.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1957, 12, 5.
3. Годунов С. К. Уравнение математической физики. «Наука», М., 1971.
4. Треногин В. А. Об асимптотике решений квазилинейных гиперболических уравнений с гиперболическим погранслоем.— Труды МФТИ, 1962, 9.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в августе 1974 г.

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

В. И. Асташкин, Я. И. Бурак

Получение большинства металлов и сплавов связано с применением процесса плавления — кристаллизации. Поэтому развитие аналитических методов количественного определения и исследования физико-механических процессов, происходящих при кристаллизации, с целью разработки на этой основе технологии получения материалов с наперед заданными свойствами имеет важное значение.

Известно, что процесс кристаллизации характеризуется определенной качественной последовательностью превращения жидкой фазы в твердую. В частности, если этот переход связан только с понижением температуры, то превращение начинается при некоторой температуре T_L, когда образуются частицы размера, более критического. Далее эти частицы подрастают и образуются новые, но находятся они во взвешенном состоянии и до некоторого момента времени практически не взаимодействуют между собой. Выросшие до определенных размеров твердофазные частицы соединяются, вследствие чего образуется как бы жесткий каркас, в порах которого находится жидкая фаза. Заканчивается процесс полным превращением жидкой фазы в твердую.

Аналитические исследования многокомпонентных гетерофазных систем, к которым относятся металлы при кристаллизации, берут свое начало от фундаментальной работы Гиббса [3], посвященной их термодинамическому равновесию. Известно значительное число работ по экспериментальному и теоретическому изучению процессов в многокомпонентных гетерогенных системах. Теоретические исследования выполняются в основном следуя постановке задачи Стефана [1,4—7,14], а также теории флуктуаций [13]. Общий подход и методика количественного описания процессов в таких системах методами термодинамики необратимых процессов изложены в работах [11, 12].

В настоящей работе предлагается конкретная теоретическая модель для количественного описания процесса кристаллизации однокомпонентной системы. С использованием методов, развитых в работах [8—10], получена система уравнений модели, которая описывает во взаимосвязи процессы теплопроводности, деформации, фазового превращения и изменения межфазной поверхности. Фазовый переход и изменение величины межфазной поверхности рассматриваются как процессы обратимые. Принимается также, что время релаксации этих процессов намного меньше времени релаксации процесса диффузии, вследствие чего диффузионное перемещение массы не