СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПИКОНЕ

М. С. Волошина

Пусть система

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \tag{1}$$

является самосопряженной системой уравнений Эйлера, соответствующей основной вариационной задаче для положительно определенного функционала

$$\int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} dx \geqslant \gamma^2 \int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} dx.$$

Здесь $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ (штрих означает транспонирование) — постоянные действительные квадратные матрицы порядка p, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного действительного пространства E_n, V — некоторая область в E_n, γ — действительное число.

Пусть D — область, ограниченная поверхностью S типа Ляпунова, $\tilde{S}$ — произвольная гладкая поверхность, охватывающая S и не имеющая с ней общих точек, $\tilde{D}$ — ограниченная $\tilde{S}$ область, а $\varphi_0(x - y)$ — фундаментальная матрица системы (1) [8],

$$C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv -2 \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk} \nu_l(y) \frac{\partial}{\partial x_k} - \tag{2}$$

граничный оператор типа Неймана [2], где $\nu_l(y)$ — компоненты единичного вектора внутренней нормали в точке $y \in S$, $\tilde{A}_{kl}$ — постоянные квадратные матрицы порядка p, определяемые единственным образом и представляющие некоторую разбивку матриц A_{kl}, причем $\tilde{A}_{kl} + \tilde{A}_{lk} = 2A_{kl}$, $\tilde{A}_{kl} = \tilde{A}'_{lk}$.

Постановка задачи Неймана. Найти непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$, дважды непрерывно дифференцируемое в D решение системы (1), удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{x \to y+0} C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(y), \quad y \in S, \ f(y) \in C(S).$$

Одним из методов приближенного решения задачи Неймана является метод Пиконе. Для системы уравнений теории упругости и систем более общего типа этот метод рассматривался в работах [1, 6] В. Д. Купрадзе и его учениками.

Перейдем к изложению этого метода для сформулированной выше задачи Неймана. Рассмотрим систему постоянных векторов высоты p:

$$\overset{(1)}{\varkappa} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overset{(2)}{\varkappa} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \overset{(p)}{\varkappa} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где σ — площадь поверхности S. Очевидно, что $\int\limits_S \overset{(i)}{\varkappa}{}' \overset{(j)}{\varkappa} ds = \delta_{ij}$.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное, всюду плотное множество точек на $\tilde{S}$.

Теорема. *Система векторов*

$$\left\{\overset{(j)}{\varkappa},\ C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overset{(i)}{\varphi}_0(x_k - y)\right\}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, p; \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \tag{4}$$

$$y \in S, \ x_k \in \tilde{S},$$

линейно независима и полна в $L_2(S)$. *Здесь* $\overset{(i)}{\varphi}_0(x_k - y)$ — *столбцы фундаментальной матрицы.*

Доказательство линейной независимости. Пусть

$$\sum_{k=-(p-1)}^{0} c_k \overset{(p+k)}{\varkappa} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} c_{ik} C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overset{(i)}{\varphi}(x_k - y) \equiv 0, \tag{5}$$

где $y \in S$, $x_k \in \tilde{S}$, c_{ik}, c_k — постоянные числа, N — произвольное натуральное число. Рассмотрим вектор

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} c_{ik}\overset{(i)}{\varphi}(x_k - x), \quad x \in D, \ x_k \in \tilde{S}. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x) = 0.$$

$$C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(y)\big|_S = -\sum_{k=-(p-1)}^{0} c_k \overset{(p+k)}{\varkappa}, \quad y \in S. \tag{7}$$

Применяя к векторам $\omega(x)$ и $\overset{(i)}{\varkappa}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ вторую формулу Грина [7]

$$\int\limits_D \left\{v'(x) A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) - \left[u'(x) A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]'\right\} dx =$$

$$= -\int\limits_S \left\{v'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \left[u'(y) B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y)\right]'\right\} d_y S,$$

где

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = A^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \ B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_l \frac{\partial}{\partial y_k},$$

и учитывая формулы (7), получаем

$$\sum_{k=-(p-1)}^{0} c_k \int\limits_{S_k} [\overset{(i)}{\varkappa}{}' \overset{(p+k)}{\varkappa}]' d_y S = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Отсюда в силу ортонормированности системы (3) $c_k = 0$, $k = 1 - p, 2 - p, \ldots$ $\ldots, 0$, что вследствие формул (5) — (7) дает

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x) = 0, \quad x \in D,$$

$$C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(y)\,|_S = 0, \quad y \in S.$$

Но тогда [3] $\omega(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k \overset{(k)}{\varkappa}$, $x \in \bar{D}$, a_k — константы, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k^2 \neq 0$.

Рассмотрим вектор $\tilde{\omega}(x) = \omega(x) - \sum\limits_{k=1}^{p} a_k \overset{(k)}{\varkappa}$. Так как $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\omega}(x) = 0$, $x \in D$, $\tilde{\omega}(x) \equiv 0$, $x \ni \bar{D}$, то в силу аналитичности $\tilde{\omega}(x) \equiv 0$, $x \ni \bar{D}$, т. е.

$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} c_{ik}\overset{(i)}{\varphi}(x_k - x) \equiv \sum_{i=1}^{p} a_i \overset{(i)}{\varkappa}$. Приближая точку $x \in \tilde{D}$ к произвольно выбранной точке $x_{k_0} \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и учитывая свойства фундаментальной матрицы $\varphi_0(x_k - x)$, получаем $\sum_{i=1}^{p} c_{ik_0}\overset{(i)}{\varphi}_{0j}(x_{k_0} - x) = 0$, что в силу обратимости фундаментальной матрицы дает $c_{ik_0} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, а это ввиду произвольного выбора точки x_{k_0} доказывает линейную независимость системы (4).

Доказательство полноты. Пусть $\mu(y) \in L_2(S)$ — произвольный вектор, удовлетворяющий условиям

$$\int_S [\mu(y)]' \overset{(i)}{\varkappa} d_y S = 0, \text{ т. е. } \int_S \mu_i(y)\, d_y S = 0, \qquad i = 1, \ldots, p, \tag{8}$$

$$\int_S [\mu(y)]' \left[C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \overset{(i)}{\varphi}_0(x_k - y) \right] d_y S = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, p, \\ k = 1, 2, 3, \ldots, \end{array} \tag{9}$$

$\mu_i(y)$ — компоненты вектора $\mu(y)$. Покажем, что $\mu(y) = 0$, $y \in S$.

Рассмотрим потенциал двойного слоя [4]

$$\begin{gathered} W(x, \mu) = \int_S G_0(x - y, \nu(y))\, \mu(y)\, d_y S, \\ G_0(x - y, \nu(y)) = 2 \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0(x - y)}{\partial x_k} \tilde{A}_{kl} \nu_l(y). \end{gathered} \tag{10}$$

В силу (2)

$$W'(x, \mu) = -\int_S \mu'(y)\, C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_0(x - y)\, d_y S,$$

откуда вследствие (9) получаем $W(x_k, \mu) \equiv 0$, $x_k \in \tilde{S}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Значит, $W(x, \mu) \equiv 0$, $x \in \tilde{S}$. Следовательно,

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, \mu) = 0, \quad x \in E_2 \setminus \bar{\bar{D}},$$

$$W(y, \mu)|_S = 0,$$

а поскольку на бесконечности $W(x, \mu) = O\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)$, то $W(x, \mu) \equiv 0$, $x \in E_2 \setminus \bar{\bar{D}}$, а в силу аналитичности $W(x, \mu) \equiv 0$, $x \in E_2 \setminus \bar{D}$.

Из тождества $W(x, \mu) \equiv 0$, $x \in E_2 \setminus \bar{D}$ следует, что

$$\lim_{x \to y_0 - 0} C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, \mu) = 0, \quad x \in E_2 \setminus \bar{D}, \ y_0 \in S,$$

а по теореме Таубера — Ляпунова [5]

$$\lim_{x \to y_0 + 0} C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, \mu) = 0, \quad x \in D, \ y_0 \in S.$$

Таким образом, $W(x, \mu)$ является решением внутренней однородной задачи Неймана:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, \mu) = 0, \ x \in D,$$

$$\lim_{x \to y_0 + 0} C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, \mu) = 0, \quad x \in D, \quad y_0 \in S.$$

Так как такое решение есть произвольный постоянный столбец, то можно положить $W(x, \mu) = \sum_{k=1}^{p} b_k \overset{(k)}{\varkappa}$, $x \in D$, b_k — произвольные константы.

Итак, $W(x, \mu) = 0$, $x \in E_2 \setminus \overline{D}$, $W(x, \mu) = \sum_{k=1}^{p} b_k \overset{(k)}{\varkappa}$. Используя формулу «скачка» для потенциала (10) [4], получаем $2\mu(y) = \sum_{k=1}^{p} b_k \overset{(k)}{\varkappa}$, $y \in S$, откуда в силу (8) $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Следовательно, $\mu(y) \equiv 0$, $y \in S$, что доказывает полноту системы (4). Теорема доказана полностью.

Введем новые обозначения: $C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \overset{(i)}{\varphi_0}(x_k - y) = \overset{(pk-(p-i))}{\theta}(y)$,

$$i = 1, \ldots, p; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, ; \quad \overset{(p+i)}{\varkappa} = \overset{(i)}{\theta}, \quad i = -(p-1), \\ -(p-2), \ldots, 0.$$

Таким образом, линейно независимая, полная в $L_2(S)$ система (4) обозначена теперь $\{\overset{(j)}{\theta}(y)\}_{j=-(p-1)}^{\infty}$, причем векторы $\{\overset{(j)}{\theta}(y)\}_{j=-(p-1)}^{0}$ ортонормированы. Ортонормируя систему $\{\overset{(j)}{\theta}(y)\}_{j=1}^{\infty}$, получаем $\{\overset{(j)}{\psi}(y)\}_{j=1}^{\infty}$, где $\overset{(j)}{\psi}(y) = \sum_{k=1}^{j} b_j^k \overset{(k)}{\theta}(y)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; b_j^k — определенные константы.

Пользуясь свойствами интеграла типа Гаусса [4], легко показать, что векторы $\{\overset{(j)}{\psi}(y)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\overset{(j)}{\psi}(y)\}_{j=-(p-1)}^{0} = \{\overset{(j)}{\theta}(y)\}_{j=-(p-1)}^{0}$ ортогональны между собой. Следовательно, система $\{\overset{(j)}{\psi}(y)\}_{j=-(p-1)}^{\infty}$ ортонормирована, линейно независима и полна в $L_2(S)$.

Перейдем непосредственно к методу Пиконе для задачи Неймана. Разложим граничный вектор $f(y)$ в ряд Фурье по системе $\{\overset{(j)}{\psi}(y)\}_{j=-(p-1)}^{\infty}$:

$$f(y) \approx \sum_{k=-(p-1)}^{\infty} \overset{(k)}{\psi}(y) f_k, \quad y \in S, \; f_k = \int_S \overset{(k)}{\psi'}(y) f(y)\, d_y S. \tag{11}$$

Для существования решения задачи Неймана вектор $f(y)$ должен удовлетворять условиям [3]

$$\int_S \overset{(k)}{\varkappa'} f(y)\, d_y S = \overset{(k)}{\varkappa'} \int_S f(y)\, d_y S = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p,$$

откуда следует, что $f_{-(p-1)} = f_{-(p-2)} = \ldots = f_{-1} = f_0 = 0$, и вследствие полноты системы $\{\overset{(j)}{\psi}\}_{j=-(p-1)}^{\infty}$ получаем

$$\lim_{N\to\infty} \| f(y) - \overset{(N)}{f}(y) \|_{L_2} = 0, \; \overset{(N)}{f}(y) = \sum_{k=1}^{N} \overset{(k)}{\psi}(y) f_k, \quad y \in S. \tag{12}$$

Рассмотрим векторы

$$\overset{(N)}{f}(x) = \sum_{k=1}^{N} \overset{(k)}{\psi}(x) f_k = \sum_{k=1}^{N} f_k \sum_{j=1}^{k} b_k^j \overset{(j)}{\theta}(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k \sum_{j=1}^{k} b_k^j C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \overset{(l_j)}{\varphi_0}(x_{r_j} - x), \tag{13}$$

$$l_j = j - p\left[\frac{j-1}{p}\right], \; r_j = \left[\frac{j+(p-1)}{p}\right],$$

$$\overset{(N)}{u}(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k \sum_{j=1}^{k} b_k^j \varphi_0^{(l_j)}(x_{r_j} - x). \tag{14}$$

Очевидно, что для любого натурального N

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \overset{(N)}{u}(x) = 0, \quad x \in D,$$

$$C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \overset{(N)}{u}(y)|_S = \overset{(N)}{f}(y), \quad y \in S.$$

Следовательно,

$$\overset{(N)}{u}(x) = \frac{1}{2}\int_S \overset{(2)}{G}(y-x)\overset{(N)}{f}(y)\,d_yS - \frac{1}{2\Delta}\int_D \overset{(N)}{u}(y)\,dy, \quad x \in D,$$

где Δ — объем области D, $\overset{(2)}{G}(y-x)$ — матрица Грина задачи Неймана [3].

Поскольку решение исходной задачи Неймана представимо в виде

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_S \overset{(2)}{G}(y-x)f(y)\,d_yS - \frac{1}{2\Delta}\int_D u(y)\,dy, \quad x \in D,$$

то

$$u(x) - \overset{(N)}{u}(x) - \chi = \frac{1}{2}\int_S \overset{(2)}{G}(y-x)\,[f(y) - \overset{(N)}{f}(y)]\,d_yS,$$

где $\chi = \frac{1}{2\Delta}\int_D [\overset{(N)}{u}(y) - u(y)]\,dy$ — постоянный столбец. Применяя к правой части последнего равенства неравенство Коши — Буняковского, в силу (12) получаем

$$u(x) = \lim_{N\to\infty} \overset{(N)}{u}(x) + \chi, \quad x \in \overline{D}_1 \subset D,$$

где $\overset{(N)}{u}(x)$ определено формулой (14). Таким образом, искомое приближенное решение построено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурчуладзе Т. В. Об одном способе приближенного решения граничных задач для некоторых эллиптических систем.— Труды Тбилисского мат. ин-та, 1967, 32.
2. Волошина М. С. О некоторых граничных задачах для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка.— ДАН УССР, 1959, 4.
3. Волошина М. С. Решение задач Дирихле и Неймана для некоторых систем дифференциальных уравнений с помощью матриц Грина.— Вестн. Львовского политехн. ин-та. Вопросы алгебры и теории дифференциальных уравнений, 1973, 68.
4. Волошина М. С. О некоторых свойствах одного класса сильно эллиптических систем.— ДАН УССР, 1958, 9.
5. Волошина М. С. О теореме Таубера — Ляпунова для некоторых интегралов типа потенциала двойного слоя.— ДАН УССР. Сер. А, 1967, 6.
6. Купрадзе В. Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1968.
7. Лаврук Б. Р. Об одной граничной задаче для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.— ДАН УССР, 1956, 3.
8. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений.— УМЖ, 1951, 3, 1.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в июне 1974 г.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В. Н. Цымбал

В прямоугольнике $D: \{0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$, $0 < l < \infty$, $0 < T < \infty$, рассмотрим гиперболическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым действительным параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - \varepsilon\lambda_i(x, t)\frac{\partial U_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, t)\,U_j + f_i(x, t) \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad (1)$$

где $\lambda_i(x, t)$, $a_{ij}(x, t)$, $f_i(x, t)$ — заданные в $\overline{D}$ функции (предположения о гладкости будут указаны ниже), $U_i(x, t)$ — искомые функции.