

верстия при $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0$ (сплошные линии) и $\varepsilon_1 = 0,2$, $\varepsilon_2 = 0$ (штриховые). Кривые 1 на этих рисунках соответствуют $l_0 = 2\rho$, 2 — $l_0 = 2,5\rho$, 3 — $l_0 = 3\rho$, 4 — $l_0 = 4\rho$. Температурные усилия N_θ и моменты M_θ существенно зависят от величины относительного коэффициента теплообмена ε_1 и расстояния между отверстиями l_0 . Для $\varepsilon_1 \geq 0,1$, $\varepsilon_2 = 0$ взаимовлияние отверстий на N_θ и M_θ при $l_0 \geq 4\rho$ незначительное. В зависимости от значения параметра ε_1 и l_0 усилия N_θ могут быть сжимающими или растягивающими, а моменты M_θ всегда одного знака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. «Наукова думка», К., 1970.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.
3. Швець Р. Н., Павленко В. Д.— ФХММ, 1970, 3, 89.
4. Швець Р. Н., Павленко В. Д.— ИФЖ, 1972, 23, 5, 890.
5. Швець Р. М., Павленко В. Д.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 8, 733.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ДЖОУЛЕВА ТЕПЛА ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ ИНДУКТОРОВ

Б. И. Чорный

Определение индукционных токов и мощности джоулева тепла на основании точного решения уравнений электродинамики связано обычно со значительными математическими трудностями. В связи с этим возникает необходимость нахождения приближенного решения такой задачи.

Ниже путем решения уравнений электродинамики для системы вакуум — полубесконечное тело определяется напряженность установившегося электрического поля на границе полупространства. Далее принимается, что напряженность электрического поля изменяется по глубине полубесконечного тела, следуя закону затухания плоской электромагнитной волны. Решение строится для случая нагрева полупространства индукционными токами, возбуждаемыми линейным проводником. Мощность джоулева тепла в случае двух линейных параллельных проводников и индуктора в виде полосы определяется на основании принципа суперпозиции для напряженности электрического поля.

Рассмотрим нагрев тела, занимающего область $y \geq 0$, бесконечным линейным индуктором с током \vec{j} и примем, что он направлен по оси z и проходит через точку $(x = 0, y = -h)$ (рис. 1). В этом случае [3] вектор напряженности электрического поля \vec{E} будет иметь только z -составляющую, не зависящую от координаты z , а ее амплитудное значение определяется из уравнений

Рассмотрим нагрев тела, занимающего область $y \geq 0$, бесконечным линейным индуктором с током \vec{j} и примем, что он направлен по оси z и проходит через точку $(x = 0, y = -h)$ (рис. 1). В этом случае [3] вектор напряженности электрического поля \vec{E} будет иметь только z -составляющую, не зависящую от координаты z , а ее амплитудное значение определяется из уравнений

$$(\Delta + k_0^2) E_0(x, y) = i\mu_0 \omega j \delta(x) \delta(y + h) \quad \text{для} \quad y < 0, \quad (1)$$

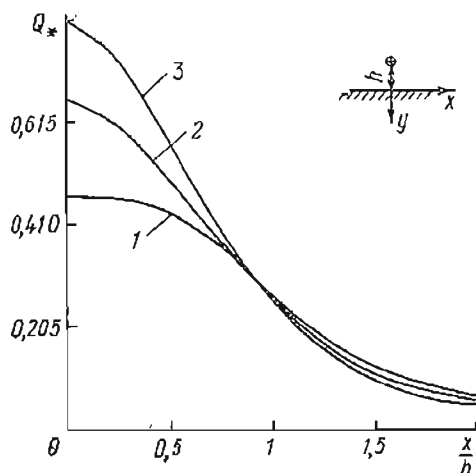


Рис. 1.

$$(\Delta + k^2) E(x, y) = 0 \text{ для } y > 0$$

и граничных условий

$$E_0(x, 0) = E(x, 0), \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_0(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E(x, 0)}{\partial y}. \quad (2)$$

Здесь

$$k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2, \quad k^2 = -i\sigma\mu\omega, \quad (3)$$

ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ — электропроводность, $\delta(x)$ — дельта-функция; величины с индексом «0» относятся к вакууму, а без индекса — к телу.

С помощью косинус-преобразования Фурье по x из выражений (1) и (2) получим

$$E(x, y) = \frac{i\omega\mu_0\mu}{\pi} j \int_0^\infty \frac{(\mu\rho_0 - \mu_0\rho) \exp(-\rho_0 h - \rho y)}{\mu^2 \rho_0^2 - \mu_0^2 \rho^2} \cos(\xi x) d\xi, \quad (4)$$

где

$$\rho_0^2 = \xi^2 - k_0^2, \quad \rho^2 = \xi^2 - k^2, \quad \text{Re } \rho_0 > 0, \quad \text{Re } \rho > 0.$$

Учитывая, что для неферромагнитного тела практически $\mu = \mu_0$, и принимая $k_0^2 = 0$, что соответствует пренебрежению токами смещения вне тела, находим

$$E(x, 0) = -\frac{jk^2}{4\sigma} \left\{ \frac{1}{u_+} [H_1(u_+) - N_1(u_+)] + \frac{1}{u_-} [H_1(u_-) - N_1(u_-)] \right\} + \frac{4j}{\sigma\pi^2 k^2} \frac{x^2 - h^2}{(h^2 + x^2)^2}, \quad (5)$$

где $N_1(u)$, $H_1(u)$ — функция Бесселя второго рода и функция Струве; $u_\pm = k(\mp x \mp ik)$.

Учитывая асимптотические разложения $H_1(u)$ и $N_1(u)$, можно получить соотношение [1]

$$H_1(u) - N_1(u) = \frac{2}{\pi} (1 \mp u^{-2}), \quad (6)$$

которое для $|u| \gg 3$ верно с точностью до 1,1%.

На основании соотношений (5) и (6) с учетом (3) получим

$$E(x, 0) = \frac{i}{2\pi\sigma} g \left\{ 2 + ah(1+i) - \frac{2h}{a} [2ah + 3(1-i)] g + \frac{8h^3}{a} (1-i) g^2 \right\}, \quad (7)$$

где $g = (h^2 + x^2)^{-1}$, $a = \sqrt{2\sigma\mu\omega}$.

На основании принципа суперпозиции, используя выражение (7), можем найти $E(x, 0)$ для двух линейных параллельных проводников одинаковой силы тока, расположенных на расстоянии $2l$ друг от друга (рис. 2), и для индуктора в виде полосы шириной $2l$ с током I (рис. 3).

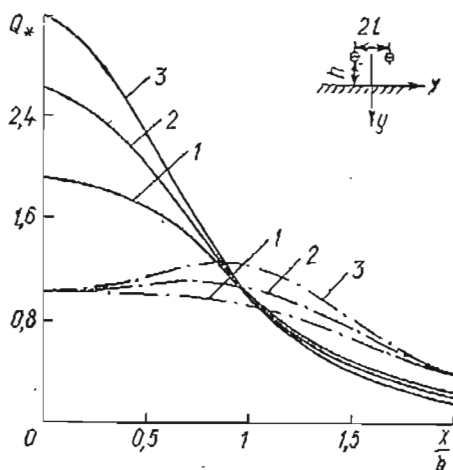


Рис. 2.

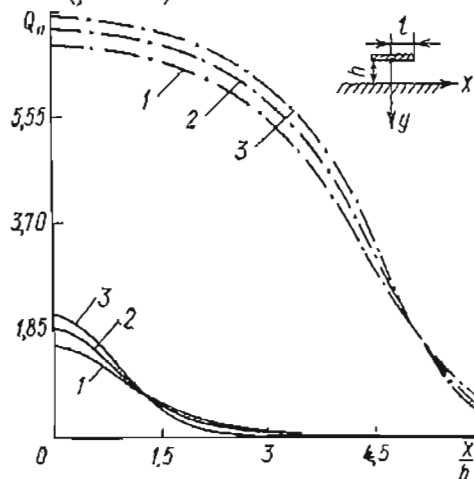


Рис. 3.

В первом случае

$$E(x, 0) = \frac{i}{2\pi\sigma} \{ [2 + ah(1+i)](f_+ + f_-) - \frac{2h}{a} [2ah + 3(1-i)](f_+^2 + f_-^2) + \frac{3h^3}{a} (1-i)(f_+^3 + f_-^3) \}, \quad (8)$$

где

$$f_{\pm} = [h^2 + (x \pm l)]^{-1}.$$

Во втором случае

$$E(x, 0) = \frac{i}{2\pi\sigma} \{ a(1+i)A - 2[(x+l)f_+ - (x-l)f_-] + \frac{2h}{a} (1-i)[(x+l)f_+^2 - (x-l)f_-^2] \}, \quad (9)$$

$$\text{где } A = \operatorname{arctg} \left(\frac{x+l}{h} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x-l}{h} \right).$$

Так как для обычных металлов показатель преломления электромагнитной волны очень высок, например для меди, и для частот меньше 10^{11} герц он больше 10^4 [4], то электромагнитная волна в металле будет распространяться почти перпендикулярно к границе, т. е. как плоская, но с переменным по x значением амплитуды. В таком приближении, согласно [2, 3], получаем

$$E(x, y) = E(x, 0) \exp \left(-\frac{1}{2} ay \right). \quad (10)$$

В рассматриваемом случае удельная мощность джоулева тепла, усредненная по периоду электромагнитной волны, имеет вид

$$Q(x, y) = \frac{\sigma}{2} E(x, y) E^*(x, y), \quad (11)$$

где E^* — величина комплексно-сопряженная к E . Тогда на основании соотношений (7) — (10) получим следующие выражения удельной мощности джоулева тепла:

1) для единичного проводника

$$Q(x, y) = \frac{i^2}{4\pi^2\sigma} \exp(-ay) g^2 \{ 2 + 2ah + a^2h^2 - \frac{4h}{a} (3 + 2ah + a^2h^2) g + \frac{4h^2}{a^2} (9 + 10ah + 2a^2h^2) g^2 - \frac{32h^4}{a^2} (3 + ah) g^3 + \frac{64h^6}{a^2} g^4 \}; \quad (12)$$

2) для двух параллельных проводников

$$Q(x, y) = \frac{i^2}{2\pi^2\sigma} \exp(-ay) \{ (2 + 2ah + a^2h^2)(f_+ + f_-)^2 + \frac{4h^2}{a^2} (9 + 6ah + 2a^2h^2)(f_+^2 + f_-^2)^2 + \frac{64h^6}{a^2} (f_+^3 + f_-^3)^2 - \frac{4h}{a} (3 + 2ah + a^2h^2)(f_+ + f_-) \times (f_+^2 + f_-^2) + \frac{16h^3}{a} (f_+ + f_-)(f_+^3 + f_-^3) - \frac{32h^4}{a^2} (3 + ah)(f_+^2 + f_-^2)(f_+^3 + f_-^3) \}; \quad (13)$$

3) для индуктора в виде полосы

$$Q(x, y) = \frac{i^2}{2\pi^2\sigma} \exp(-ay) \{ a^2A^2 - 2aA[(x+l)f_+ - (x-l)f_-] + 2[(x+l)f_+ - (x-l)f_-]^2 + 4\frac{h^2}{a^2} [(x+l)f_+^2 - (x-l)f_-^2]^2 - 4\frac{h}{a} [(x+l)f_+ - (x-l)f_-][(x+l)f_+^2 - (x-l)f_-^2] \}. \quad (14)$$

Распределение относительной мощности джоулева тепла в случае одного или двух параллельных проводников $Q \frac{2\pi^2h^2}{i^2\mu\omega} \equiv Q_*$, а также индуктора в виде полосы $Q \frac{2\pi^2}{i^2\mu\omega} \equiv Q_{\pi}$ на поверхности полупространства приведено соответственно на рис. 1—3. Кривые 1, 2, 3 на этих рисунках отвечают зна-

чениям $ah = 3; 5; 10$ соответственно. На рис. 2 штрихпунктирные линии соответствуют расстоянию между двумя проводниками $\frac{l}{h} = 1$, сплошные — $\frac{l}{h} = 0,1$. На рис. 3 сплошные линии отвечают распределению мощности джоулева тепла для индуктора в виде полосы шириной $\frac{l}{h} = 1$, штрихпунктирные — $\frac{l}{h} = 5$.

Из приведенных на рис. 1, 2 графиков видно, что для индукторов, состоящих из линейных проводников, при заданных h и l с возрастанием параметра a (уменьшении глубины проникновения электромагнитного поля) уровень мощности джоулева тепла возрастает. Из рис. 3 видно, что для исследованных случаев в области края индуктора имеет место резкое увеличение градиентности кривых распределения мощности джоулева тепла в направлении оси x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
3. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— Прикладная механика, 1970, 6, 12.
4. Смайт Р. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М., 1954.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И РАДИАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ, ВЫХОДЯЩИМИ НА КОНТУР

М. Г. Кривцун

Рассмотрим бесконечную упругую плоскость с круговым отверстием радиуса R и n симметрично расположенными трещинами одинаковой длины L , выходящими на контур отверстия. Предположим, что отверстие с трещинами теплоизолировано и свободно от внешних усилий, а на бесконечности задан однородный тепловой поток q , направленный под углом α к оси Ox . Координатные оси комплексного переменного $z = x + iy$ выбираем так, что одна из трещин расположена на положительной полуоси Ox (рис. 1).

Пусть область, расположенная вне отверстия и трещин, конформно отображается на внешность единичной окружности Γ в плоскости ζ функцией $z = \omega_n(\zeta)$. Тогда распределение температуры в области переменной ζ имеет вид [1, 6]

$$t(\zeta, \bar{\zeta}) = qR_n \operatorname{Re} \left\{ e^{i\alpha} \left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \quad (1)$$

где R_n — некоторая действительная постоянная, зависящая от формы и размеров отверстия.

Для рассматриваемого случая дифференциальное уравнение отображающей функции запишется так [7]:

$$\frac{dz}{z} = \frac{(1 - \zeta^{-n}) d\zeta}{\zeta (1 + 2\varepsilon_n \zeta^{-n} + \zeta^{-2n})^{\frac{1}{2}}}, \quad (2)$$