

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0(x, y, \tau) = \varepsilon_{yy}^0(x, y, \tau) = 0, \\ \varepsilon_{xy}^0(x, y, \tau) = \begin{cases} \varepsilon_{xy}^*(x) \delta(y) S_+(\tau), & |x| < l, \\ 0, & |x| \geq l, \end{cases} \\ S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

что соответствует мгновенному возникновению дислокации сдвига вдоль линии  $y = 0, |x| < l$ , для определения перемещений получим формулы

$$\begin{aligned} u(x, y, \tau) = \frac{c_2^2}{\pi(1+\nu)} \int_{-l}^l \varepsilon_{12}^*(\xi) \left\{ \left[ k_{1\nu} \frac{y}{r^2} - k_{2\nu} \frac{y(\gamma^2 - y^2)}{r^4} \right] (c_2^{-2} \omega_2^{-1} - c_1^{-2} \omega_1^{-1}) \tau + \right. \\ \left. + 2k_{2\nu} \frac{y(3\gamma^2 - y^2)}{r^6} (\omega_1 - \omega_2) \tau + \frac{y\tau}{2c_1^2 r^6} (\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1}) \right\} d\xi, \\ v(x, y, \tau) = \frac{c_2^2}{\pi(1+\nu)} \int_{-l}^l \varepsilon_{12}^*(\xi) \left\{ \left[ k_{1\nu} \frac{\gamma}{r^2} - k_{2\nu} \frac{\gamma(y^2 - \gamma^2)}{r^4} \right] (c_2^{-2} \omega_2^{-1} - c_1^{-2} \omega_1^{-1}) \tau + \right. \\ \left. + 2k_{2\nu} \frac{\gamma(3y^2 - \gamma^2)}{r^6} (\omega_1 - \omega_2) \tau + \frac{\gamma\tau}{2c_1^2 r^6} (\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1}) \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \omega_i = (\tau^2 - c_i^{-2} r^2)^{1/2} \quad (i = 1, 2); \quad \gamma = x - \xi; \quad r^2 = \gamma^2 + y^2; \quad k_{1\nu} = \frac{1-\nu}{2}; \\ k_{2\nu} = \frac{1+\nu}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулы (3), можно определить напряженное состояние в произвольной точке пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Ю. А. Теория упругости. «Высшая школа», М., 1971.
2. Подстригач Я. С., Осадчук В. А. — ФХММ, 1969, 5, 5.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в декабре 1973 г.

### ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ДВУХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В. Д. Павленко, Л. В. Сииншин

Наличие инородных макровключений или отверстий в оболочечных элементах конструкций, работающих в условиях неравномерного нагрева, приводит к концентрации температурных напряжений, которые могут значительно влиять на их прочность. В связи с этим исследуем напряженное состояние тонкой пологой сферической оболочки толщины  $2h$  с двумя равными круговыми отверстиями радиуса  $\rho$ , которая нагревается внешней средой с помощью конвективного теплообмена. Посредине между центрами отверстий, с которыми связаны локальные системы координат  $r_k \theta_k$ ,  $k = 0, 1$ , разместим начало полярной системы координат  $r, \theta$ . Пусть в точке  $r = 0, \theta = 0$  имеет место стационарный сосредоточенный нагрев внешней средой или источником тепла, а на контурах свободных от напряжений

$$N_{r_k/r_k} = 0, \quad M_{r_k/r_k} = 0, \quad S_{r_k \theta_k/r_k} = 0, \quad Q_{r_k/r_k} +$$

$$4 \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{r_k \theta_k / r_k = \gamma}}{\partial \theta_k} = 0, \quad (1)$$

происходит теплообмен по закону Ньютона

$$\frac{\partial T_i}{\partial r_k} = h_i [T_i - T_c^{(i)} (\theta_k - \pi k)] \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где  $h_i$  — относительный коэффициент теплоотдачи на контуре отверстия,  $T_c^{(i)}$  — усредненные значения температуры среды.

Температурное поле, которое для рассматриваемого случая нагрева оболочки найдено в работе [4], в системе координат  $r_0 \theta_0$  при  $r_0 < l$  запишем в виде

$$F_i(r_0 \theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(i)}(r_0) \cos n \theta_0, \quad (3)$$

$$F_n^{(i)}(r_0) = a_n^{(i)} K_n(r_0 \mu_i) + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+n} a_p^{(i)} I_n(r_0 \mu_i) [K_{p+n}(l \mu_i) + K_{p-n}(l \mu_i)] + \\ + (-1)^n \varepsilon_n q_i \pi^{-1} K_n(0,5 l \mu_i) I_n(r_0 \mu_i).$$

Здесь приняты обозначения

$$\mu_i^2 = h^{-2} [\varepsilon_1 + h^2 k_0^2 + 3 \lambda_i (\varepsilon_2 - k_0 h)], \quad \lambda_{1,2} = 6^{-1} (\varepsilon_2 - k_0 h)^{-1} [(2\varepsilon_1 + 3) \mp \\ \mp \sqrt{(2\varepsilon_1 + 3)^2 + 12 (\varepsilon_2 - k_0 h)^2}],$$

$$q_1 = \frac{\mu (1 + 3 \lambda_1)}{4 \pi h^2}, \quad q_2 = \frac{\mu (1 + 3 \lambda_2)}{4 \pi h^2 \lambda_2}, \quad \varepsilon_i = \frac{h}{2} (h_i^{(1)} \pm h_i^{(2)}), \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 0,5 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n \geq 1, \end{cases}$$

$l$  — расстояние между центрами отверстий,  $k_0 = h/R$  — кривизна оболочки,  $h_i^{(1)}$ ,  $h_i^{(2)}$  — приведенные коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей,  $\mu = h h_i^{(1)}$  — критерий Био,  $a_n^{(i)}$ ,  $a_p^{(i)}$  — неизвестные постоянные.

— Напряженно-деформированное состояние оболочки описывается неоднородным дифференциальным уравнением [3], которое с учетом формул [4]

$$T_1 = \frac{\lambda_2 (F_1 - \lambda_1 F_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{\lambda_2 F_1 - F_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (4)$$

можно представить в виде [5]

$$\Delta \Delta \Phi - i \gamma^2 \Delta \Phi = \frac{\alpha i \gamma_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \Delta [(v_0 - i \lambda_2) F_1 - \lambda_2 (v_0 - i \lambda_1) F_2], \quad (5)$$

$$\text{где } h \gamma_0 = \sqrt{3(1 - v^2)}, \quad \gamma_0 v_0 h = 1 + v, \quad R \gamma^2 = \gamma_0.$$

Общее решение уравнения (5) можно представить в форме

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0. \quad (6)$$

Решение уравнений Лапласа и Гельмгольца  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , удовлетворяющие условиям симметрии к условиям на бесконечности в системе координат  $r_0 \theta_0$  примут вид [1]

$$\Phi_1 = -2iB \left[ \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r_0^n}{n l^n} \cos n \theta_0 \right] + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{c_n + i d_n}{r_0^n} + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} (c_p + i d_p) r_0 \frac{p(p+n+1)!}{l^{n+pn}} \sum_{t=0}^p \frac{(-1)^{t-n} 2^t}{t!(p-t)!} \right] \cos n \theta_0,$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{ (a_n + i b_n) H_n^{(1)}(r_0 \gamma \sqrt{-i}) + \varepsilon_n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+n} J_n(r_0 \gamma \sqrt{-i}) \}$$

$$\times (a_p + ib_p) [H_{p+n}^{(1)}(l\gamma\sqrt{-i}) + (-1)^n H_{p-n}^{(1)}(l\gamma\sqrt{-i})] \cos n\theta_0,$$

где  $c_n, d_n, c_p, d_p, a_n, b_n, a_p, b_p$  — неизвестные постоянные. Частное решение  $\Phi_0$  уравнения (5) в случае температурного поля (3) можно записать так:

$$\Phi_0 = \frac{\alpha_l \gamma_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \frac{\nu_0 - i\lambda_2}{\mu_1^2 - i\gamma^2} F_1 - \lambda_2 \frac{\nu_0 - i\lambda_1}{\mu_2^2 - i\gamma^2} F_2 \right]. \quad (8)$$

Неизвестные постоянные в выражениях (3) и (7) определим из бесконечных систем алгебраических уравнений, которые получим в результате удовлетворения граничных условий (1) и (2) на основном отверстии. За основное примем отверстие, в котором расположена локальная система координат  $r_0\theta_0$ . Граничные условия на контуре второго отверстия вследствие периодичности решений будут удовлетворяться автоматически. Полученные бесконечные системы алгебраических уравнений можно решать методом редукции [2].

В рассматриваемом случае усилия  $N_{\theta_0}$  и момент  $M_{\theta_0}$  на контуре основного отверстия определяются формулами

$$N_{\theta_0} = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \gamma^2 [a_n \operatorname{ber}_n \kappa - b_n \operatorname{bei}_n \kappa + \varepsilon_n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (a_p L^{(2)} - b_p L^{(1)})] + \gamma_1 \mu_1^2 F_n^{(1)} - \gamma_2 \mu_2^2 F_n^{(2)} \} \cos n\theta_0, \quad (9)$$

$$M_{\theta_0} = D(1 + \nu) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \gamma^2 [a_n \operatorname{hei}_n \kappa + b_n \operatorname{her}_n \kappa + \varepsilon_n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (a_p L^{(1)} + b_p L^{(2)})] + \gamma_3 F_n^{(1)} - \gamma_4 F_n^{(2)} \} \cos n\theta_0.$$

Здесь введены обозначения

$$L^{(1)} = L_2 \operatorname{ber}_n \kappa + L_1 \operatorname{bei}_n \kappa, \quad L^{(2)} = L_1 \operatorname{ber}_n \kappa - L_2 \operatorname{bei}_n \kappa,$$

$$L_1 = (-1)^n \operatorname{her}_{p+n} l\gamma + \operatorname{her}_{p-n} l\gamma,$$

$$L_2 = (-1)^n \operatorname{hei}_{p+n} l\gamma + \operatorname{hei}_{p-n} l\gamma, \quad \gamma_1 = \mu_0^{(1)} (\nu_0 \gamma^2 + \lambda_2 \mu_1^2), \quad \gamma_2 = \mu_0^{(2)} \lambda_2 (\nu_0 \gamma^2 - \lambda_1 \mu_2^2),$$

$$\gamma_3 = 2\lambda_0 - \mu_0^{(1)} \mu_1^2 (\nu_0 \mu_1^2 + \lambda_2 \gamma^2), \quad \gamma_4 = 2\lambda_0 \lambda_2 - \mu_0^{(2)} \lambda_2 \mu_2^2 (\nu_0 \mu_2^2 + \lambda_1 \gamma^2), \quad 3D(1 - \nu^2) = 2Eh^3,$$

$$\mu_0^{(i)} = \alpha_l \gamma_0 (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} (\mu_i^4 + \gamma^4)^{-1}, \quad \lambda_0 = \alpha_l h^{-1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}, \quad \kappa = \rho\gamma.$$

В качестве примера рассмотрено напряженное состояние оболочки, на контурах отверстий которой заданы температурные характеристики  $T_1 = T_c^{(1)} = \text{const}$ ,  $T_2 = 0$ . Температура окружающей среды принимается равной нулю. Подсчеты проводились на контуре основного отверстия для оболочки с параметрами  $\rho/h = 2$ ,  $k_0 h = 0,025$ ,  $\nu = 0,3$ .

На рис. 1 и 2 показано распределение температурных усилий  $N_{\theta_0} = N_{\theta_0}/N_0$  и моментов  $M_{\theta_0} = M_{\theta_0}/N_0 h$ , где  $N_0 = \alpha_l h E T_c^{(1)}$ , по контуру от-

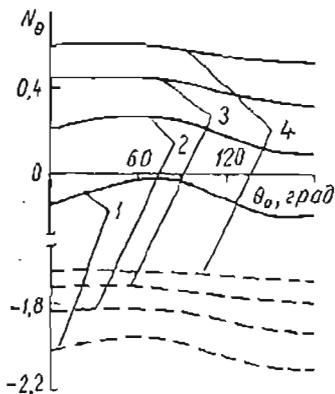


Рис. 1.

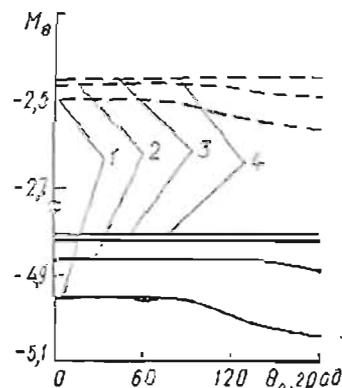


Рис. 2.

версия при  $\epsilon_1 = 0,1$ ,  $\epsilon_2 = 0$  (сплошные линии) и  $\epsilon_1 = 0,2$ ,  $\epsilon_2 = 0$  (штриховые). Кривые 1 на этих рисунках соответствуют  $l_0 = 2\rho$ , 2 —  $l_0 = 2,5\rho$ , 3 —  $l_0 = 3\rho$ , 4 —  $l_0 = 4\rho$ . Температурные усилия  $N_\theta$  и моменты  $M_\theta$  существенно зависят от величины относительного коэффициента теплообмена  $\epsilon_1$  и расстояния между отверстиями  $l_0$ . Для  $\epsilon_1 \geq 0,1$ ,  $\epsilon_2 = 0$  взаимовлияние отверстий на  $N_\theta$  и  $M_\theta$  при  $l_0 \geq 4\rho$  незначительное. В зависимости от значения параметра  $\epsilon_1$  и  $l_0$  усилия  $N_\theta$  могут быть сжимающими или растягивающими, а моменты  $M_\theta$  всегда одного знака.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. «Наукова думка», К., 1970.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.
3. Швец Р. Н., Павленко В. Д.— ФХММ, 1970, 3, 89.
4. Швец Р. Н., Павленко В. Д.— ИФЖ, 1972, 23, 5, 890.
5. Швец Р. М., Павленко В. Д.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 8, 733.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ДЖОУЛЕВА ТЕПЛА ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ ИНДУКТОРОВ

Б. И. Чорный

Определение индукционных токов и мощности джоулева тепла на основании точного решения уравнений электродинамики связано обычно со значительными математическими трудностями. В связи с этим возникает необходимость нахождения приближенного решения такой задачи.

Ниже путем решения уравнений электродинамики для системы вакуум — полубесконечное тело определяется напряженность установившегося электрического поля на границе полупространства. Далее принимается, что напряженность электрического поля изменяется по глубине полубесконечного тела, следуя закону затухания плоской электромагнитной волны. Решение строится для случая нагрева полупространства индукционными токами, возбуждаемыми линейным проводником. Мощность джоулева тепла в случае двух линейных параллельных проводников и индуктора в виде полосы определяется на основании принципа суперпозиции для напряженности электрического поля.

Рассмотрим нагрев тела, занимающего область  $y \geq 0$ , бесконечным линейным индуктором с током  $\vec{j}$  и примем, что он направлен по оси  $z$  и проходит через точку  $(x = 0, y = -h)$  (рис. 1). В этом случае [3] вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  будет иметь только  $z$ -составляющую, не зависящую от координаты  $z$ , а ее амплитудное значение определяется из уравнений

$$(\Delta + k_\delta^2) E_0(x, y) = i\mu_0 \omega j \delta(x) \delta(y - h) \quad \text{при} \quad y < 0, \quad (1)$$

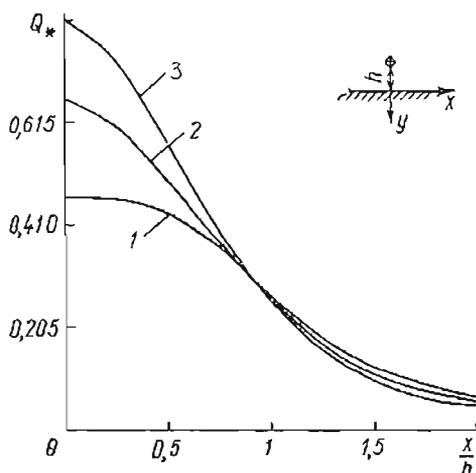


Рис. 1.