малых значениях ψ с увеличением параметра b_0 критическая сила существенно увеличивается (почти в два раза, как и в случае жесткого закрепления); для $\psi > 1$ влияние трения на критическую нагрузку уменьшается и, начиная с $\psi \approx 10$, становится пренебрежимо малым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорий Л. М., Исаев Ю. И.— ФХММ, 1970, 6.
2. Зорiй Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1968, 1072.
3. Зорiй Л. М., Iсаєв Ю. I.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 529.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ, ОБУСЛОВЛЕННОМ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛЕМ ДИСТОРСИИ

В. А. Осадчук, И. И. Литвин

В работе [2] на основании решения плоской статической задачи о напряженно-деформированном состоянии, обусловленном полем дисторсии, предложен способ сведения задачи о напряженном состоянии пластинки с трещиной к решению сингулярного интегрального уравнения. В настоящей работе рассматривается плоская задача об определении напряженно-деформированного состояния в случае, когда поле дисторсии является функцией координат и времени. При этом, учитывая, что задачи плоской теории упругости — плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние — математически идентичны [1], исходными приняты соотношения, соответствующие обобщенному плоскому напряженному состоянию тонкой пластинки. Полученные результаты могут быть использованы для определения поля упругих волн, излучаемых скачками смещений, заданными как функции координат и времени.

Для вывода основных уравнений рассматриваемой задачи будем исходить из представления компонентов тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + \overset{0}{e}_{ij} \qquad (i, j = x, y), \tag{1}$$

где $\overset{0}{e}_{ij}(x, y, z, \tau)$ — компоненты тензора дисторсии — симметричного тензора второго ранга, несовместимость которого обуславливает возникновение собственных напряжений, $e_{ij}^{(s)}(x, y, z, \tau)$ — компоненты упругой деформации, связанные с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$e_{xx}^{(s)} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_y); \quad e_{xy}^{(s)} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy}; \quad e_{yy}^{(s)} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}). \tag{2}$$

Здесь E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, x, y, z — декартовы прямоугольные координаты, τ — время.

Используя соотношения, связывающие компоненты тензора деформации с осредненными перемещениями u, v [1], и выражения (1), (2), для определения осредненных напряжений получаем формулы

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}[\nabla_1 u + \nu\nabla_2 v - (\overset{0}{\varepsilon}_{xx} + \nu\overset{0}{\varepsilon}_{yy})]; \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}[\nabla_1 v + \nabla_2 u - \overset{0}{\varepsilon}_{xy}]; \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}[\nabla_2 v + \nu\nabla_1 u - (\overset{0}{\varepsilon}_{yy} + \nu\overset{0}{\varepsilon}_{xx})], \tag{3}$$

где

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varepsilon_{ij}^0 dz,$$

$2h$ — толщина пластинки.

Подставляя выражения (3) в уравнения движения [1]

$$\nabla_1\sigma_{xx} + \nabla_2\sigma_{xy} = \rho p^2 u; \quad \nabla_2\sigma_{yy} + \nabla_1\sigma_{xy} = \rho p^2 v \tag{4}$$

и используя операторный метод, затухающее на бесконечности в случае бесконечной (или частное в случае ограниченной) пластинки решение полученных уравнений запишем так:

$$u = \sum_{j=1}^{3} L_{ju}\varphi_j; \quad v = \sum_{j=1}^{3} L_{jv}\varphi_j, \tag{5}$$

где

$$L_{1u} = \nabla_1[\nabla_1^2 + (2+\nu)\nabla_2^2 - c_2^{-2}p^2]; \quad L_{2u} = \nabla_1[\nu\nabla_1^2 - \nabla_2^2 - \nu c_2^{-2}p^2];$$

$$L_{3u} = \nabla_2[\nabla_2^2 - \nu\nabla_1^2 - c_1^{-2}p^2]; \quad L_{1v} = \nabla_2[\nu\nabla_2^2 - \nabla_1^2 - \nu c_2^{-2}p^2];$$

$$L_{2v} = \nabla_2[\nabla_2^2 + (2+\nu)\nabla_1^2 - c_2^{-2}p^2]; \quad L_{3v} = \nabla_1[\nabla_1^2 - \nu\nabla_2^2 - c_1^{-2}p^2];$$

$$p^2 = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}; \quad c_1^2 = \frac{E}{1-\nu^2}\rho; \quad c_2^2 = \frac{E}{2(1+\nu)}\rho.$$

Функции φ_j удовлетворяют уравнениям

$$[\nabla^2\nabla^2 - \frac{3-\nu}{2c_2^2}p^2\nabla^2 + c_1^{-4}p^4]\,\varphi_j(x, y, \tau) = \varepsilon_j^0(x, y, \tau) \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Здесь для удобства записи введены обозначения $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_{xx}^0$, $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_{yy}^0$, $\varepsilon_3^0 = \varepsilon_{xy}^0$, ∇^2 — оператор Лапласа.

Задавая поле дисторсии в виде

$$\varepsilon_j^0(x, y, \tau) = \frac{1}{2}\varepsilon_j^*\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(\tau),$$

подставим это выражение в уравнение (6) и, используя преобразования Фурье и Лапласа, фундаментальное решение последнего запишем в виде

$$\Phi_j = \frac{c_2^2\varepsilon_j}{\pi(1+\nu)}\left[\tau\left(\operatorname{Arch}\frac{c_1\tau}{\sqrt{x^2+y^2}} - \operatorname{Arch}\frac{c_2\tau}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}(x^2+y^2)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\tau^2 - c_2^{-2}(x^2+y^2)}\right]. \tag{7}$$

Полученное фундаментальное решение позволяет свести к квадратурам задачу о напряженно-деформированном состоянии пластины, обусловленном заданным полем дисторсии. Действительно, для определения разрешающих функций φ_j в общем случае имеем

$$\varphi_j(x, y, \tau) = \int_0^{\tau}\iint_{\Omega} \varepsilon_j^0(\xi, \eta, t)\,\Phi_j(x-\xi,\ y-\eta,\ \tau-t)\,d\xi d\eta dt, \tag{8}$$

где Ω — область распределения поля дисторсии.

Подставляя φ_j в соотношения (5), (3), при заданном поле дисторсии как функции координат и времени можно найти перемещения и напряжения в произвольной точке пластинки.

Для бесконечной пластинки в случае, когда поле дисторсии описывается выражением

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^0_{xx}(x, y, \tau) = \varepsilon^0_{yy}(x, y, \tau) = 0, \\
\varepsilon^0_{xy}(x, y, \tau) = \begin{cases} \varepsilon^*_{xy}(x)\,\delta(y)\,S_+(\tau), & |x| < l, \\ 0, & |x| \geqslant l, \end{cases} \\
S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leqslant 0, \end{cases}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

что соответствует мгновенному возникновению дислокации сдвига вдоль линии $y = 0, |x| < l$, для определения перемещений получим формулы

$$
\begin{gathered}
u(x, y, \tau) = \frac{c_2^2}{\pi(1+\nu)} \int\limits_{-l}^{l} \varepsilon^*_{12}(\xi) \left\{ \left[k_{1\nu} \frac{y}{r^2} - k_{2\nu} \frac{y(\gamma^2 - y^2)}{r^4} \right] (c_2^{-2}\omega_2^{-1} - c_1^{-2}\omega_1^{-1})\,\tau + \right. \\
\left. + 2k_{2\nu} \frac{y(3\gamma^2 - y^2)}{r^6} (\omega_1 - \omega_2)\,\tau + \frac{y\tau}{2c_1^2 r^6} (\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1}) \right\} d\xi, \\
v(x, y, \tau) = \frac{c_2^2}{\pi(1+\nu)} \int\limits_{-l}^{l} \varepsilon^*_{12}(\xi) \left\{ \left[k_{1\nu} \frac{\gamma}{r^2} - k_{2\nu} \frac{\gamma(y^2 - \gamma^2)}{r^4} \right] (c_2^{-2}\omega_2^{-1} - c_1^{-2}\omega_1^{-1})\,\tau + \right. \\
\left. + 2k_{2\nu} \frac{\gamma(3y^2 - \gamma^2)}{r^6} (\omega_1 - \omega_2)\,\tau + \frac{\gamma\tau}{2c_1^2 r^6} (\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1}) \right\} d\xi,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\omega_i = (\tau^2 - c_i^{-2} r^2)^{1/2} \qquad (i = 1,\ 2); \quad \gamma = x - \xi; \quad r^2 = \gamma^2 + y^2; \quad k_{1\nu} = \frac{1-\nu}{2};
$$

$$
k_{2\nu} = \frac{1+\nu}{2}.
$$

Подставляя эти выражения в формулы (3), можно определить напряженное состояние в произвольной точке пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аменз аде Ю. А. Теория упругости. «Высшая школа», М., 1971.
2. Подстригач Я. С., Осадчук В. А.— ФХММ, 1969, 5, 5.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ДВУХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В. Д. Павленко, Л. В. Сининшин

Наличие инородных макровключений или отверстий в оболочечных элементах конструкций, работающих в условиях неравномерного нагрева, приводит к концентрации температурных напряжений, которые могут значительно влиять на их прочность. В связи с этим исследуем напряженное состояние тонкой пологой сферической оболочки толщины $2h$ с двумя равными круговыми отверстиями радиуса ρ, которая нагревается внешней средой с помощью конвективного теплообмена. Посредине между центрами отверстий, с которыми связаны локальные системы координат $r_k \theta_k$, $k = 0, 1$, разместим начало полярной системы координат r, θ. Пусть в точке $r = 0$, $\theta = 0$ имеет место стационарный сосредоточенный нагрев внешней средой или источником тепла, а на контурах свободных от напряжений

$$
N_{r_k/r_k=\rho} = 0, \quad M_{r_k/r_k=\rho} = 0, \quad S_{r_k\theta_k/r_k=\rho} = 0, \quad Q_{r_k/r_k=\rho} +
$$